rede e-Tec Brasil

Matemática Financeira

Roberto José Medeiros Junior

INSTITUTO FEDERAL
PARANÁ
Educação a Distância

Curitiba-PR
2012

Presidência da República Federativa do Brasil

Ministério da Educação

Secretaria de Educação a Distância

Este Caderno foi elaborado pelo Instituto Federal do Paraná para o Sistema Escola Técnica Aberta do Brasil – e-Tec Brasil.

Prof. Irineu Mario Colombo
Reitor

Prof. Joelson Juk
Chefe de Gabinete

Prof. Ezequiel Westphal
Pró-Reitoria de Ensino - PROENS

Prof. Gilmar José Ferreira dos Santos
Pró-Reitoria de Administração - PROAD

Prof. Silvestre Labiak
Pró-Reitoria de Extensão, Pesquisa e Inovação - PROEPI

Neide Alves
Pró-Reitoria de Gestão de Pessoas e Assuntos Estudantis - PROGEPE

Bruno Pereira Faraco
Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento Institucional - PROPLAN

Prof. José Carlos Ciccarino
Diretor Geral do Câmpus EaD

Prof. Marcelo Camilo Pedra
Diretor de Planejamento e Administração do Câmpus EaD

Prof.ª Mércia Freire Rocha Cordeiro Machado
Diretora de Ensino, Pesquisa e Extensão – DEPE/EaD

Prof.ª Cristina Maria Ayroza
Assessora de Ensino, Pesquisa e Extensão – DEPE/EaD

Prof.ª Márcia Denise Gomes Machado Carlini
Coordenadora de Ensino Médio e Técnico do Câmpus EaD

Prof. Roberto José Medeiros Junior
Coordenador do Curso

Prof.ª Marcia Valéria Paixão
Vice-coordenadora do Curso

Adriana Valore de Sousa Bello Cassiano Luiz Gonzaga da Silva
Jéssica Brisola Stori
Denise Glovaski Souto
Assistência Pedagógica

Prof.ª Ester dos Santos Oliveira
Prof.ª Sheila Cristina Mocellin
Idamara Lobo Dias
Prof.ª Maria Angela Motta
Revisão Editorial

Eduardo Artigas Antoniacomi
Diagramação

e-Tec/MEC
Projeto Gráfico

Catalogação na fonte pela Biblioteca do Instituto Federal do Paraná

Apresentação e-Tec Brasil

Prezado estudante,

Bem-vindo ao e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional pública de ensino, a Escola Técnica Aberta do Brasil, instituída pelo Decreto nº 6.301, de 12 de dezembro 2007, com o objetivo de democratizar o acesso ao ensino técnico público, na modalidade a distância. O programa é resultado de uma parceria entre o Ministério da Educação, por meio das Secretarias de Educação a Distância (SEED) e de Educação Profissional e Tecnológica (SETEC), as universidades e escolas técnicas estaduais e federais.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade, e promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

O e-Tec Brasil leva os cursos técnicos a locais distantes das instituições de ensino e para a periferia das grandes cidades, incentivando os jovens a concluir o ensino médio. Os cursos são ofertados pelas instituições públicas de ensino e o atendimento ao estudante é realizado em escolas-polo integrantes das redes públicas municipais e estaduais.

O Ministério da Educação, as instituições públicas de ensino técnico, seus servidores técnicos e professores acreditam que uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e educação técnica, – é capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!

Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Janeiro de 2010

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: sempre que se desejar que os estudantes desenvolvam atividades empregando diferentes mídias: vídeos, filmes, jornais, ambiente AVEA e outras.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Sumário

Palavra do professor-autor

Prezado Estudante,

O presente material tem como objetivo enriquecer o estudo acerca das atividades e práticas relativas à disciplina de Matemática Financeira, na modalidade de Educação a Distância, do Instituto Federal do Paraná (IFPR). O método de ensino contempla, também, atividades autoinstrutivas e as supervisionadas, abrangendo conteúdos relevantes a área do Secretariado, apresentação diferenciada das propostas de atividades práticas aliadas ao caráter teórico-reflexivo das atividades.

Cada capítulo foi estruturado pensando em retomar conceitos elementares de Matemática importantes para o desenvolvimento da teoria e atividades autoinstrutivas. Estudaremos proporcionalidade (regra de três), porcentagem, progressões, séries, sequências e uso de calculadoras simples.

Os tópicos apresentados estão divididos de modo a contemplar o "bê-á-bá" das Finanças e da Educação Financeira com foco nos conhecimentos matemáticos pertinentes e interdisciplinares. Em finanças pessoais, o profissional técnico em Administração terá clareza da aplicabilidade dos conhecimentos matemáticos à saúde financeira do dinheiro, das aplicações em curto, médio e longo prazo e de ações determinantes da empresa que faz parte.

O livro encontra-se dividido de modo didático, seguindo um critério de aprendizado rico de conhecimentos, porém de fácil assimilação. Observando uma evolução de conceitos e técnicas apresentadas gradativamente à maneira que se realizam as atividades autoinstrutivas e supervisionadas lançando mão aos recursos de acompanhamento pedagógico, entre eles o telefone (0800) e fóruns via web (tutoria). A intenção é valorizar cada ponto como se fosse um módulo condensado e relevante, visando levar você para um mundo de reflexão, reeducação financeira e aprendizado contínuo. Sentimentos que serão estimulados em cada aula com a presença (mesmo que virtual) do professor conferencista e professor web.

Desejamos muito sucesso e aprendizado! Sincero abraço!

Professor Roberto José Medeiros Junior

Aula 1 – O contexto das finanças na história da matemática

No decorrer desta aula você irá aprender sobre o que são finanças e educação financeira, saberá também a razão de utilizar matemática nesses procedimentos.

1.1 Dinheiro e Temporalidade

Figura 1.1: Moeda
Fonte: http://www.fatosdaeconomia.com.br

Quando tratamos de dinheiro e temporalidade, alguns elementos básicos devem ser levados em consideração, tais como:

Inflação → Os preços não são os mesmos sempre;

Risco → Investimentos envolvem risco que geram perda ou ganho de dinheiro;

Incerteza →Não há como saber que tipo de investimento é mais rentável sem estudo prévio;

Figura 1.2: Dinheiro
Fonte: http://www.jogoscelular.net

Utilidade → Se não é útil, deve ser adquirido?

Oportunidade → Sem dinheiro as oportunidades dizem adeus.

Você sabia que existem várias passagens na Bíblia que tratam de finanças?
Confira em 1Cr.29:12-14; 1Tm.6:9-10.
Em suma, todo cristão, como filho de Deus, recebe coisas, inclusive o dinheiro, que deve ser utilizado de maneira correta, sensata e temente a Deus para a glória do nome dele. Temos que ser equilibrados, ganhando com práticas honestas e fugindo das práticas ilícitas. É lícito desfrutarmos dos benefícios que o dinheiro traz, mas não devemos nos apegar (apegarmos) à cobiça a qualquer custo para conseguir dinheiro. Podemos usar o dinheiro para dízimos, ofertas, no lar, no trabalho e em lazer. As pessoas devem evitar contrair dívidas fora do alcance, comprar sempre que possível à vista, fugir dos fiadores, pagar os impostos, e como patrão pagar justos salários. Além disso, deve haver economia doméstica, com liberdade moral e responsável, evitando conflitos, pois afinal o dinheiro é de uso do casal.
Fonte: www.discipuladosemfronteiras.com/contato.php acessado em 03/2009.

A Matemática Financeira possui diversas aplicações no atual sistema econômico. A palavra **finanças** remete especificamente àquelas relações da matemática com o dinheiro tal e qual o concebemos nas diversas fases da história da humanidade.

Muitas situações estão presentes no cotidiano das pessoas e têm ligação imediata com o dinheiro, seja o fato de ter um pouco de dinheiro, nada de dinheiro ou muito dinheiro. Em todas as situações ter educação financeira torna-se fator determinante da ascensão profissional e saúde financeira pessoal e empresarial.

Os financiamentos são os mais diversos e criativos. Essa "mania" é muito antiga, remete as relações de troca entre mercadorias que com o passar das eras e diferentes civilizações evoluíram naturalmente quando o Homem percebeu existir uma estreita relação entre o dinheiro e o tempo - "tempo é dinheiro". Processos de acumulação de capital e a desvalorização da moeda levariam intuitivamente a ideia de juros, pois se realizavam basicamente devido ao valor temporal do dinheiro.

1.2 Juros

O conceito de juros surgiu no momento em que o homem percebeu a existência de uma afinidade entre o dinheiro e o tempo. As situações de acúmulo de capital e desvalorização monetária davam a ideia de juros devido ao valor momentâneo do dinheiro (cada dia as diferentes moedas tinham e continuam tendo um valor). Algumas tábuas matemáticas se caracterizavam pela organização dos dados e textos relatavam o uso e a repartição de insumos agrícolas através de operações matemáticas.

Figura 1.3: Tempo
Fonte: http://bloglucrativo.blogspot.com

Os sumérios, povos que habitaram o Oriente Médio, desenvolveram o mais antigo sistema numérico conhecido, registravam documentos em tábuas de argila. Essas tábuas retratavam documentos de empresas comerciais. Algumas eram utilizadas como ferramentas auxiliares nos assuntos relacionados ao sistema de peso e medida. Havia tábuas para a multiplicação, números quadrados, números cúbicos e exponenciais (ideia de função). As funções exponenciais estão diretamente ligadas aos cálculos de juros compostos e os juros simples à noção de função linear. Mais adiante veremos com mais detalhes essas relações.

Figura 1.4: Escrita dos sumérios
Fonte: http://www.cyberartes.com.br/

Consequentemente existe a relação da escrita antiga dos sumérios com o nosso sistema de numeração, o sistema indo-arábico (inventado pelos hindus e transmitido à Europa Ocidental pelos árabes).

E os juros? Sempre existiram?

Figura 1.5: Hindu
Fonte: http://portaldoprofessor.mec.gov.br

Na época dos sumérios, os juros eram pagos pelo uso de sementes e de outros bens emprestados. Os agricultores realizavam transações comerciais onde adquiriam sementes para efetivarem suas plantações. Após a colheita, os agricultores realizavam o pagamento através de sementes com a seguida quantidade proveniente dos juros do empréstimo. A forma de pagamento dos juros foi modificada para suprir as exigências atuais, no caso dos agricultores, claro que o pagamento era feito na próxima colheita. A relação tempo/juros foi se ajustando de acordo com a necessidade de cada época. Atualmente, nas transações de empréstimos, o tempo é preestabelecido pelas partes negociantes.

Vale observar que os juros sempre sofreram com as intempéries. Naquela época, muito mais relacionadas com o clima, época de plantio e colheita. Atualmente, os juros sofrem alterações de base por conta das políticas monetárias, do banco central, ou seja, a oscilação do juro depende não apenas da vontade política/econômica do Ministro da Fazenda e das decisões do COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central), mas também das políticas econômicas nacionais e internacionais de diferentes gestões, período de crises financeiras, alta e baixa da taxa de desemprego, da instalação de indústrias e de índices de desenvolvimento humano (IDH).

Figura 1.6: Índices
Fonte: http://www.cgimoveis.com.br

Atualmente se utiliza o financiamento para as mais diversas situações do universo capitalista, porque o "ter" é a engrenagem da máquina financeira mundial. A compra da casa própria, carro, moto, realizações pessoais (empréstimos), compras a crediário ou com cartão de crédito, aplicações financeiras, investimentos em bolsa de valores, entre outras situações financeiras, dependem do quanto se ganha e de quanto está disposto a arriscar em financiamentos a curto, médio e longo prazo. Em resumo, todas as movimentações financeiras são baseadas na estipulação prévia de taxas de juros e envolvem o tempo para quitar a dívida.

Ao realizarmos um empréstimo a forma de pagamento é feita através de prestações mensais acrescidas de juros, isto é, o valor de quitação do empréstimo é superior ao valor inicial do empréstimo. A essa diferença damos o nome de juros, ou seja, o bem adquirido tem valor agregado maior do que se fosse comprado à vista (em parcela única). Uma questão pertinente: é melhor comprar parcelado ou guardar o dinheiro para comprar à vista? Esse é o grande objetivo da formação para a Educação Financeira, nossa meta para este curso.

Resumo

Aprendemos nessa aula o que são finanças e um pouco sobre a nova lei que regulamenta a inserção da Educação Financeira nos currículos escolares. Vimos também a razão de utilizar conceitos de matemática nos procedimentos financeiros.

Aula 2 – Relação algébrica: razão

No decorrer desta aula, revisaremos o conceito de razão, propiciando maior entendimento e exploração de conceitos matemáticos fundamentais à dedução de relações algébricas (fórmulas) úteis aos cálculos de matemática financeira.

A noção de relação algébrica em matemática financeira é importante para representar de modo geral as relações que estabeleceremos entre o dinheiro, os juros e o tempo. De modo geral atribuímos letras (variáveis) para representar o dinheiro gasto, o financiamento, investimento, tempo de aplicação, juros mensais, entre outros. Sendo assim é muito provável que para cada autor que consultar você encontre diferentes letras para representar as variáveis citadas.

Uma relação bastante útil em matemática financeira é a proporcionalidade, frequentemente conhecida como "regra de três". Sua utilidade vai desde o cálculo de porcentagens até a transformação de unidades de tempo e valor monetário. Primeiramente vamos nos ater a noção de razão e proporção.

2.1 Razão

Existem várias maneiras de comparar duas grandezas, por exemplo, quando se escreve $a > b$ (lê-se "a" maior do que "b") ou $a < b$ (lê-se "a" menor do que "b") e $a = b$ (lê-se "a" igual ao "b"), estamos comparando as grandezas **a** e **b**. Essa comparação pode ser feita através de uma razão entre as duas grandezas, isto é o quociente entre essas grandezas. Em resumo, uma razão é a representação da divisão entre dois valores "a" e "b".

$$\frac{a}{b} = a:b = a/b$$

Exemplo:

I. A razão entre 6 e 3 é expressa por 6:3 ou 6/3, ou ainda $\frac{6}{3}$. Se pretendemos comparar a e b determino a razão a: b ou a/b, ou seja, estamos afirmando que "a" é duas vezes maior que "b", ou seja, o dobro.

2.2 Aplicações

Entre as aplicações práticas de razões especiais, as mais comuns, são:

a) Velocidade média

A velocidade média em geral é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida e um tempo gasto neste percurso.

$$\text{Velocidade média} = \frac{\text{distância percorrida}}{\text{tempo gasto no percurso}}$$

Figura 2.1: Estrada
Fonte: http://www.freefoto.com

II. Suponhamos que um carro percorreu 120 km em 2 horas. A velocidade média do carro nesse percurso será calculada a partir da razão:

$$V_{média} = \frac{120km}{2h} = 60km/h$$

O que significa que, em 1 hora o carro percorreu 60 km.

b) Escala

Escala é a comparação entre o comprimento observado no desenho (mapa, por exemplo) e o comprimento real correspondente, ambos na mesma unidade de medida.

$$\text{Escala} = \frac{\text{comprimento do desenho}}{\text{comprimento real}}$$

Exemplo:

III. Em um mapa, um comprimento de 8 m está representado por 16 cm. Qual a escala usada para fazer esse mapa?

8 m = 800 cm.

Escala $\frac{16cm}{800cm} = \frac{1}{50}$ ou ainda escala 1:50, como é mais comum nos desenhos e mapas.

Isto significa que cada 1 cm medido no desenho é igual 50 cm no tamanho no real.

c) Densidade demográfica

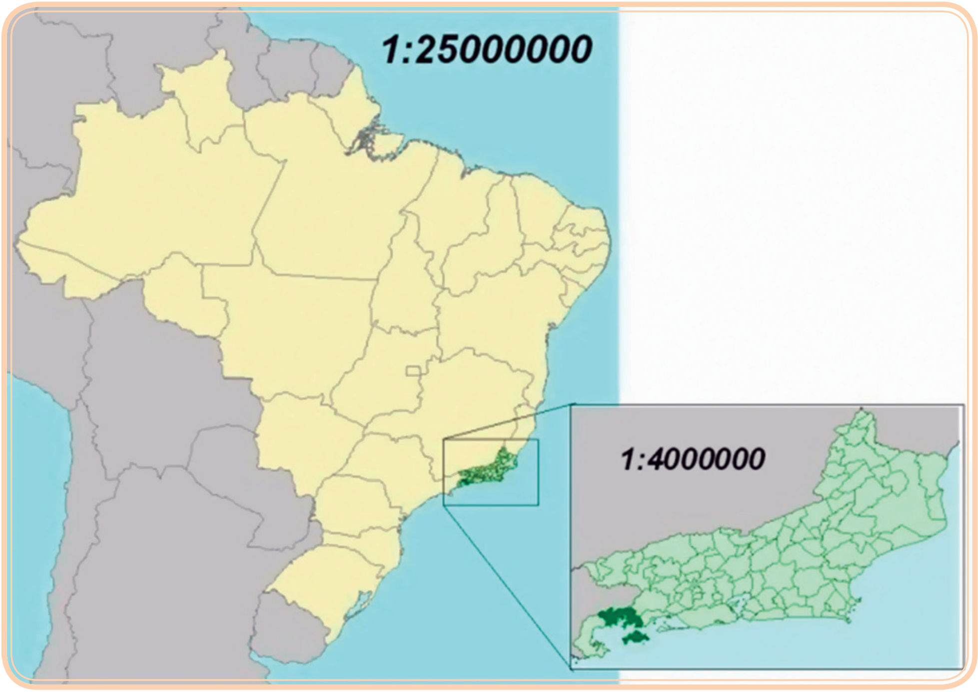


Figura 2.2: Densidade demográfica
Fonte: http://www.grupoescolar.com

Exemplo:

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{\text{número de habitantes}}{\text{área total do território}}$$

IV. Um município ocupa a área de 5.000 km² E, de acordo com o censo realizado, tem população aproximada de 100.000 habitantes. A densidade demográfica desse município é obtida assim:

$$\text{Densidade demográfica} = \frac{100.000 \text{ hab}}{5.000 \text{ km}^2} = 20 \text{ hab / km}^2$$

Isto significa que para cada 1 quilômetro quadrado, esse município tem 20 habitantes.

Para o nosso caso mais específico de finanças, um exemplo de razão é relacionar a noção de razão com a transformação de frações em números decimais (com vírgula). Vejamos alguns exemplos:

A razão 20:2, ou $\frac{20}{2}$ é igual a 10. A razão de 20 para 2 é 10, ou seja, vinte é dez vezes maior que dois.

A razão 12 : 3 ou 12/3 é igual a quatro, ou seja, doze é quatro vezes maior que três.

Figura 2.3: Preço
Fonte: http://www.flickr.com

A razão $\frac{4}{6} : \frac{4}{6}$ é igual a 1. A razão de 4/6 para 4/6 é 1 (um inteiro ou 100%).

A informação de que um produto que queremos comprar aumentou em R$25,00, como saber se foi um aumento significativo? Como saber se vale a pena comprar naquele momento ou esperar por uma promoção?

De modo analítico podemos comparar o valor do aumento com o valor do produto, para analisar a razão do aumento, isto é, o quanto aumentou em relação ao valor inicial.

Se o produto valia R$1.000,00, devemos achar a razão de 25 para 1.000. Esta razão é igual à 0,025, ou 2,5%. Sabemos que o produto aumentou 2,5%. Porém se o produto valia R$100,00 teremos a razão de 25 para 100, isto é, o produto aumentou 25%. Note que a % nada mais é do que uma razão (*comparação*) entre 2 grandezas: o aumento e o preço do produto.

Com este modo de analisar os valores podemos tomar a decisão financeira de comprar ou não o produto. Vale ressaltar que, neste caso, não estamos levando em consideração outros fatores que ajudariam na decisão, como os juros, os riscos e o chamado custo de oportunidade do capital. Estes fatores serão detalhados mais adiante na disciplina.

As situações apresentadas destacam a linguagem mais utilizada nas finanças como um todo: a porcentagem. Este é assunto das nossas próximas aulas.

Saiba mais

4. **Percentagem/Porcentagem:** "É opcional dizer percentagem (do latim *per centum*) ou porcentagem (em razão da locução 'por cento'). Mas só se diz percentual. Com as expressões que indicam porcentagens o verbo pode ficar no plural ou no singular, conforme o caso, já que a concordância pode ser feita com o número percentual ou com o substantivo a que ele se refere.

   Por Maria Tereza de Queiroz Piacentini.

   Fonte: http://kplus.cosmo.com.br/materia.asp?co=49&rv=Gramatica, acessado em setembro de 2009.

5. **Leis e preço à vista:** "O artigo 31 do Código de Defesa do Consumidor determina que os produtos e serviços ofertados ou apresentados ao consumidor devem exibir, entre outras características, o seu preço. E esse preço é o de à vista. Para o caso de pagamento parcelado, o art. 52 da mesma lei prevê como obrigação do comerciante informar ao consumidor, além do preço à vista, o montante dos juros cobrados, os acréscimos legalmente previstos (como taxa de abertura de crédito, por exemplo) e o valor total que será pago parceladamente."

   Fonte:http://www.diarioon.com.br/arquivo/4054/colunas/coluna-865.htm, acessado em julho de 2009.

Resumo

Nesta aula revisamos o conceito e as principais aplicações de razão, bem como exemplos úteis aos cálculos e o entendimento dos formulários de matemática financeira.

Aula 3 – Revendo o conceito de potencialização

Nesta aula, você retomará o significado de algumas propriedades da potenciação e porcentagem, ou seja, conhecerá a importância da palavra "por cento" e também suas aplicações nas questões financeiras.

3.1 Potenciação

A ideia de potenciação pode ser explicada, quando usamos a seguinte situação no lançamento de dados:

Figura 3.1: Dados 1
Fonte: http://cute-and-bright.deviantart.com

Figura 3.2:Dados 2
Fonte:http://usefool-deviantart.com

Quando lançamos dois dados consecutivos, podemos obter os seguintes resultados:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Assim, temos 36 resultados possíveis nesses lançamentos.

Entretanto, podemos chegar a essa conclusão utilizando outro raciocínio, que seria a multiplicação das possibilidades de resultado para cada um dos dados:

1º dado	2º dado
↓	↓
6 possibilidades	6 possibilidades → $6 \times 6 = 6^2 = 36$

Faça da mesma maneira lançando três dados consecutivos:

1º dado	2º dado	3º dado	
↓	↓	↓	
6 possibilidades	6 possibilidades	6 possibilidades	→ $6 \times 6 \times 6 = 6^3 = 216$

1º dado	2º dado	3º dado	nº dado
↓	↓	↓	↓
6	6	6	6 $6 \times 6 \times (...) \times 6 = 6^n$

Logo percebemos que esta situação representa uma potência, ou seja, um caso particular da multiplicação. Desta maneira podemos definir potência como um produto de fatores iguais.

$a^n = a . a . a . a . (...) a$

Onde: "a" é a base
"n" é o expoente, o resultado é a potência.

Por exemplo:

$(-2)^2 = (-2).(-2) = 4$

$(-3)^3 = (-3).\ (-3).\ (-3) = -27$

$4^4 = 4.4.4.4 = 256$

$5^5 = 5.5.5.5.5 = 3125$

Observação:

Pela observação dos exemplos acima temos as seguintes conclusões:

$$(+)^{par} = + \qquad (-)^{par} = +$$

$$(+)^{ímpar} = + \qquad (-)^{ímpar} = -$$

Expoente par o resultado dá sempre positivo

Expoente ímpar sempre se conserva o sinal da base

3.1.1 Casos particulares

Considere a seguinte sequência de potência de base 2:

$2^4 = 16$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^3 = 8$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^2 = 4$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^1 = 2$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^0 = 1$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-1} = \frac{2}{2}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-2} = \frac{2}{4}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$\downarrow :2 \rightarrow 2^{-4} = \frac{1}{16}\ldots$

Com estes resultados concluímos que:

1. Toda potência de expoente 1 é igual à base

$$a^1 =$$

2. Toda potência de expoente zero é igual a 1, sendo a ≠ 0.

$$a^0 = 1$$

3. Toda potência de expoente negativo é igual ao inverso da potência de expoente positivo

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \text{ sendo } a \neq 0$$

3.1.2Propriedades das potências:

As propriedades das potências são utilizadas para simplificar os cálculos aritméticos:

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

A seguir temos alguns exemplos dos casos particulares e das propriedades das potências.

a) $1^0 = 1$

b) $5^1 = 5$

c) $2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

d) $2^2 . 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 32$

e) $2^3 \div 2^2 = 2^{3-2} = 2^1 = 2$

f) $(2^2)^3 = 2^6 = 64$

Resumo

Nesta aula, retomamos o significado da potenciação por meio de exemplos práticos relacionados à probabilidade e estatística. Tais exemplos serão úteis ao entendimento que se tem sobre as fórmulas as quais serão vistas mais adiante.

Aula 4 – Porcentagem

O objetivo desta aula é rever conceitos de porcentagem, ou seja, a importância da expressão "por cento" e as aplicações cotidianas nas questões financeiras.

Figura 4.1: Oferta
Fonte: muralbrasil.wordpress.com

Figura 4.2: Promoção
Fonte: meionorte.com

Observe nas lojas os encartes, e na internet a quantidade de vezes que a representação % (por cento) está presente na comunicação das mais diversas empresas e órgãos públicos. Trata-se de uma linguagem amplamente difundida, e é senso comum entre a população de que se trata de um modo de comunicação com vistas em representar a parte de um todo de 100 unidades. Dada essa importância, vejamos alguns exemplos da representação em porcentagem versus a representação na forma de razão e o equivalente em decimal:

Tabela 4.1 - Representação

Representação	Exemplo de situação usual
50%	"UNE quer que 50% dos recursos do Fundo Social sejam investidos em educação".
½	"Emagreça 1/2 kg por dia comendo sanduíche".
0,5	"Oferta: Lapiseira Pentel Técnica 0,5mm Preta - P205"
Metade	"Governo Federal reduziu pela metade o dinheiro destinado ao sistema penitenciário".

Fonte: Elaborado pelo autor

Note que a tabela traz diferentes situações que são representadas pelo mesmo conceito de "metade". Porém cada situação exposta pede uma diferente representação. Por exemplo, não seria adequado dizer: "emagreça 50% de um quilograma por dia". Para o nosso caso específico utilizaremos amplamente a notação de porcentagem, por estar intimamente relacionada com o sistema monetário que está definido como número decimal posicional.

Toda razão da forma a/b na qual o denominador b =100, é chamada taxa de porcentagem ou simplesmente porcentagem ou ainda percentagem.

Historicamente, a expressão <u>por cento</u> aparece nas principais obras de aritmética de autores italianos do século XV. O símbolo % surgiu como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Para indicar um índice de 10 por cento, escrevemos 10% e isto significa que em cada 100 unidades de algo, tomaremos 10 unidades.

O cálculo de 10% de 80, por exemplo, pode ser obtido como o produto de 10% por 80, isto é: $10\%.80 = \frac{10}{100}.80 = 800 / 100 = 8$.

Situações mais elementares, como a citada anteriormente, podem ser resolvidas "de cabeça" (cálculo mental). Imagine que os 80 citados são na verdade o valor da conta de um jantar em família; sobre esse valor vamos acrescentar a taxa de serviço de garçom que é de 10% sobre o consumo total. Sendo assim, basta dividir por 10 o valor da conta, resultando em 8, ou melhor, em 8,00 reais e somar este resultado ao total consumido:

R$8,00 + R$80,00 = R$88,00.

Em geral, para indicar um índice de M por cento, escrevemos M% e para calcular M% de um número N, realizamos o produto:

$$\text{Produto} = M\%.N = \left(\frac{m}{100}\right).N$$

Exemplo 1.

Um fichário tem 25 fichas numeradas, sendo que 52% dessas fichas estão etiquetadas com um número par. Quantas fichas têm a etiqueta com número par? Quantas fichas têm a etiqueta com número ímpar?

Solução:

Etiquetas Pares = 52% de 25 fichas = 52%.25 = 52.25 / 100 = 13. O restante, (100% - 52% = 48% são de fichas número ímpar)

Poderíamos ainda calcular o valor de 50% e acrescentar 2% (1% + 1%), vejamos:

(metade de 25) 50% de 25 = 12,5 + (a centésima parte de 25) 1% de 25 + 1% de 25 = 0,5.

A soma 12,5 + 0,5 = 13.

Nesse fichário, há 13 fichas etiquetadas com número par e 12 fichas com número ímpar.

Exemplo 2.

Num torneio de basquete, uma determinada seleção disputou quatro partidas na primeira fase e venceu três. Qual a porcentagem de vitórias obtida por essa seleção nessa fase?

Solução:

Vamos indicar por X% o número que representa essa porcentagem. Esse problema pode ser expresso da seguinte forma: X% de 4 = 3

Assim temos:

$$\left(\frac{x}{100}\right) . 4 = 3$$

$$\left(\frac{4x}{100}\right) = 3$$

$$4x = 300$$

$$x = 75$$

Ou ainda poderíamos utilizar o conceito de razão: ¾ = 0,75, ou seja, na primeira fase a porcentagem de vitórias foi de 75%.

Exemplo 3.

Ao comprar uma mercadoria, obtive um desconto de 8% sobre o preço marcado na etiqueta. Pagou-se R$690,00 pela mercadoria. Qual o preço original da mercadoria?

Solução:

Seja X o preço original da mercadoria. Se obtive 8% de desconto sobre o preço da etiqueta, o preço que paguei representa 100%-8%=92% do preço original, e isto significa que 92% de X = 690

Assim temos:

92% .x = 690

$(\frac{92}{100}) \cdot x = 690$

$(\frac{92x}{100}) = 690$

92. x = 69.000

x = 69.000 / 92 = 750

O preço original da mercadoria era de R$750,00.

Saiba mais

Abreviaturas empregadas na notação das taxas:

Abreviatura	Significado
a.d.	ao dia
a.m.	ao mês
a.b.	ao bimestre
a.t.	ao trimestre
a.q.	ao quadrimestre
a.s.	ao semestre
a.a.	ao ano

Ano civil ou exato: formado por 365 ou 366 dias (ano bissexto);

Ano comercial: formado por 360 dias.

Resumo

Nesta aula, revisamos o conceito de porcentagem, ou seja, a importância do "por cento" e das aplicações cotidianas nas questões financeiras utilizando apenas o denominador 100 nas razões do tipo a/b (com b sempre igual a 100).

Aula 5 – Porcentagem II

O objetivo agora consiste no intenso treinamento do conceito de porcentagem por meio de exercícios resolvidos e de aprendizagem, sendo estes últimos taxados de obrigatórios, ou seja, é primordial a sua resolução por parte dos alunos deste curso.

Exercício 1

Dos 35 candidatos que prestaram um concurso, 28 foram aprovados. Sendo assim, qual foi a taxa de aprovação?

Solução:

A razão que representa os candidatos aprovados seria 28/35. Para obtermos a taxa percentual, vamos dividir o numerador pelo denominador (28: 35), obtendo assim 0,8.

Contudo, podemos escrever assim: $0{,}8 = \frac{80}{100} = 80\%$

Resposta:

Nesse concurso, 80% dos candidatos inscritos receberam a aprovação.

Exercício 2

Numa fábrica, trabalhavam 600 funcionários. Neste ano, o número de trabalhadores aumentou em 15%. Sendo assim, quantos funcionários têm a fábrica agora?

Solução:

Cálculo de 15% de 600 = $\frac{15}{100}.600 = 0{,}15.600 = 90$ funcionários

600 + 90 = 690 funcionários

Resposta:

690 funcionários

Exercício 3

Cristiano teve um aumento de 8% e passou a receber R$1.680,00. Sendo assim, qual era a sua remuneração antes do reajuste?

Solução:

A remuneração anterior correspondia a 100%. Como houve um reajuste de 8%, o novo salário passou a representar 100% + 8% = 108%. Como as grandezas são diretamente proporcionais:

$$\frac{100}{x} = \frac{108}{1680}$$

$108x = 100 \,.\, 1680$

$x = 168.000 : 108$

$x = 1.555.55$

Resposta:

Remuneração anterior ao reajuste: R$1.555.55

Discuta com os colegas outras formas de resolução.

Atividades de aprendizagem

1. O salário de Roberto era x reais em janeiro. Em maio, ele recebeu um aumento de 20% e outro de 15%, em novembro. Seu salário atual é de R$2.208,00. Sendo assim, calcule o salário de Roberto em janeiro.

R: (R$1.600,00)

2. Calcule:

a) 14% de R$1.500,00

R: (R$210,00)

b) 0,6% de R$150,00

R: (R$0,90)

c) 240% de R$500,00

R: (R$1.200,00)

3. (PUC-RS) O valor de um produto foi acrescido quatro vezes o da época de seu lançamento no mercado. A porcentagem que o valor atual representa, em relação ao preço inicial, é de:

a) 500%

b) 450%

c) 400%

d) 5%

e) 4%

Resp: (c)

4. (UFOP-MG) O preço de uma mercadoria sofreu dois aumentos sucessivos, de 10% e 20%. De quantos por cento foi o aumento total dessa mercadoria?

a) 30%

b) 32%

c) 25%

d) 22%

e) 12%

Resp: (b)

Anotações

Aula 6 – Taxas e coeficientes

Nesta aula, você compreenderá a diferença entre as taxas e coeficientes.

6.1 Taxas

As taxas se referem aos valores expressos preferencialmente em porcentagem; enquanto que os coeficientes são estritamente numéricos (números decimais). Veja um exemplo:

"Se, de um lado, a expectativa de um corte maior nos juros indica inflação mais alta para 2012 e 2013, seu impacto na atividade deve acelerar o crescimento econômico no próximo ano, avaliam economistas ouvidos pelo **Valor**. Após a redução de 0,75 ponto percentual na Selic, que foi para 9,75% ao ano na semana passada, analistas revisaram ligeiramente para cima suas projeções para o avanço do Produto Interno Bruto (PIB) de 2013, de 4,15% para 4,20%, segundo o Boletim Focus divulgado nesta segunda-feira pelo Banco Central. As estimativas para este ano foram mantidas em 3,3%."

Fonte: http://www.valor.com.br/brasil/2566168/queda-da-selic-eleva-projecoes-para-o-pib-de-2013-no-focus, acessado em 03/12.

Note que a taxa básica de juros, a chamada Selic (Sistema Especial de Liquidação e Custódia) estará sempre atrelada a um valor decimal expresso em porcentagem. A taxa é fixada pelo COPOM (Comitê de Política Monetária), órgão representado pelo presidente e diretores do Banco Central. Durante as reuniões, eles decidem se abaixam, se aumentam ou se mantém a Selic. A decisão deles é baseada em cumprir a meta de inflação do Brasil. Quanto maior a taxa Selic, menor é a inflação. Se a taxa básica de juros cai, a inflação sobe.

A taxa Selic é básica porque os títulos do governo, ou seja, os fundos de onde as pessoas podem investir no governo, e de onde os bancos ou outras grandes instituições podem pegar dinheiro emprestado se baseiam nessa taxa, tanto para pagar os rendimentos dos investimentos no governo, quanto para cobrar os juros de quem pegou emprestado dos cofres públicos.

A Selic é a taxa base usada para fazer os cálculos financeiros. Isso causa um efeito cascata em todas as operações tributárias, de empréstimos, de financiamentos, de pagamentos, entre outros. Se a Selic é alta, todos os juros do país são altos. O efeito é imediato: menos gente comprando, porque o dinheiro é mais gasto com o pagamento de juros e empréstimos. O mercado, então, é obrigado a baixar os preços na tentativa de estimular as vendas.

No *site* da receita federal você encontra as taxas Selic desde o ano de 1995. http://www.receita.fazenda.gov.br/pagamentos/jrselic.htm É uma ótima fonte de consulta das diferentes ações desta ou daquela equipe financeira desde o governo de FHC até o governo Lula.

6.1.1 Taxa nominal

É quando o período de capitalização dos juros ao capital não coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

1200% a.a. com capitalização mensal.

450% a.s. com capitalização mensal.

300% a.a.com capitalização trimestral.

6.1.2 Taxa Efetiva

É quando o período de capitalização dos juros ao capital coincide com aquele a que a taxa está referida.

Exemplos:

120% a.m. com capitalização mensal.

450% a.s. com capitalização semestral.

1300% a.a.com capitalização anual.

6.1.3 Taxa Real

È a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação.

Pagamento do Imposto de Renda Pessoa Física: um exemplo de taxa a pagar.

Figura 5.1: Leão
Fonte: http://apensaoalimenticia.com.br

Com a correção de 4,5% na tabela do Imposto de Renda Pessoa Física 2012, autorizada pelo governo em março do ano passado, menos contribuintes pagarão o imposto este ano, já que a correção aumenta o limite de isenção do IR. Ou aqueles que continuarão pagando, com o reajuste da tabela, seriam menos tributados. O governo afirma que deixará de arrecadar cerca de R$1,6 bilhão neste ano com a correção da tabela. Estão isentos de tributação os contribuintes que ganharam até R$1.566,61 por mês no ano passado. Em março, o governo oficializou a correção da tabela do Imposto de Renda para 2011, 2012, 2013 e 2014, ou seja, até o fim do mandato da presidente Dilma Rousseff. O reajuste anual da tabela do IR em 4,5% será aplicado até 2014. O porcentual corresponde ao centro da meta de inflação definida pelo governo.

Fonte: http://g1.globo.com/economia/imposto-de-renda/2012/noticia/2012/02/tabela-do-imposto-de-renda-2012-foi--corrigida-em-45-conheca-os-limites.html, acessado em 03/12.

Tabela 6.1: Cálculo mensal do imposto sobre a renda da pessoa física para o exercício 2012, ano-calendário 2011

Base de cálculo mensal em R$	Alíquota %	Parcela a deduzir do imposto em R$
Até 1.566,61	-	-
De 1.566,62 até 2.347,85	7,5	112,43
De 2.347,86 até 3.130,51	15,0	280,94
De 3.130,52 até 3.911,63	22,5	505,62
Acima de 3.911,63	27,5	692,78

Fonte: http://www.receita.fazenda.gov.br/Aliquotas/ContribFont2012a2015.htm, acessado em 03/12

Já os coeficientes dizem respeito a valores independentes da representação em porcentagem, os valores passam a ser absolutos. Ou seja, se as taxas são expressas em grupos de 100 partes (por cento), os coeficientes servem para qualquer quantidade de dados numéricos e ajudam a representar intervalos, variações de máximo e mínimo, de correlação com tabelas preestabelecidas. Veja um exemplo:

Tabela 6.2: Indicadores de Inadimplência

Indicadores Econômicos 7-mar-2012

I.39 - Indicadores de inadimplência

Período		Inadimplência no SCPC em São Paulo					Cheques devolvidos por insuficiência de fundos/ cheques compensados (%)					
		Novos registros (mil)	Consultas (mil)	Taxa bruta (t-3) %	Registros cancelados (mil)	Taxa líquida (t-3) %	Brasil	Região				
								Norte	Nordeste	Sudeste	Centro-Oeste	Sul
		A	B	C=A/B	D	E=(A-D)/B						
2011	Jan	484	1 889	24,1	353	6,5	5,58	8,76	8,03	4,94	6,62	5,49
	Fev	527	1 718	25,6	385	6,9	5,77	9,23	8,44	5,06	6,77	5,77
	Mar	592	2 016	23,4	400	7,6	6,75	10,50	10,23	5,92	7,88	6,57
	Abr	546	1 761	28,9	374	9,1	6,22	9,91	9,58	5,45	7,38	6,02
	Mai	490	1 913	28,6	351	8,1	6,21	9,50	9,55	5,46	7,29	5,96
	Jun	531	1 878	26,4	395	6,8	5,96	8,68	9,20	5,23	7,03	5,76
	Jul	509	1 962	28,9	394	6,5	5,98	8,96	9,21	5,19	7,12	5,91
	Ago	615	1 991	32,1	489	6,6	5,76	8,76	8,85	4,99	6,84	5,70
	Set	566	1 991	30,2	462	5,5	5,89	9,34	9,07	5,08	7,14	5,81
	Out	562	2 020	28,6	450	5,7	6,41	9,96	10,66	5,44	7,82	6,16
	Nov	568	2 082	28,5	483	4,3	6,33	9,66	9,91	5,47	7,82	6,11
	Dez	485	2 576	24,4	589	-5,2	5,53	8,59	8,35	4,87	6,80	5,30
2012	Jan	549	1 940	27,2	395	7,6	6,19	9,33	8,85	5,45	7,49	6,10
	Fev	585	1 699	28,1	422	7,8	...	...	...	...	...	...
% mês		6,54	-12,45	3,36	6,83	2,63	11,89	8,54	5,96	11,77	10,15	15,16
% mês (-1)		13,18	-24,67	11,59	-33,00	-245,92	-12,56	-11,04	-15,74	-10,95	-13,06	-13,34
% mês (-2)		-14,58	23,73	-14,58	22,08	- 222,41	-1,32	-2,97	-7,02	0,70	0,01	-0,70
% mês ano ant.		10,95	-1,10	9,70	9,60	13,32	10,89	6,50	10,28	10,26	13,18	11,21
% ano		12,15	0,89	11,26	10,72	15,10	10,89	6,50	10,28	10,26	13,18	11,21
% 12 meses		11,46	2,77	6,02	9,98	11,35	8,43	11,70	9,32	7,27	10,14	7,66

Fonte: ACSP e Bacen/Deban

Fonte: http://www.bcb.gov.br/?INDECO, acessado em 03/12

Resumo

Nesta aula vimos três tipos de taxas: a nominal, a efetiva e a real. Na sequência veremos que a transformação de taxas será bastante útil nos cálculos que envolvem capitalização composta, dado que, por ser juros sobre juros, teremos valores apresentados com mais de uma casa decimal. Atenção especial aos arredondamentos: Se considerarmos 2 ou mais casas decimais na utilização dos coeficientes, o resultado pode sofrer alterações.

Anotações

Aula 7 – Juros e aplicações financeiras

Nesta aula de hoje faremos uma introdução aos juros, em especial o significado dos juros como linguagem própria para representar as aplicações de capitalização na Matemática Financeira.

7.1 Juros? E os juros?

Os juros são representados em taxas (por cento), muitas vezes prefixadas por alguma política financeira ou índice predefinido pelo governo. O importante é que ambas (taxas e coeficientes) são modos de expressar os índices que determinada gestão ou diretoria utiliza para controlar e reajustar preços e demais aplicações financeiras.

E quando aparecem anúncios sedutores de **prestações sem juros?**

Figura 7.1: Prestação
Fonte: www.divulgacred.blogspot.com

Figura 7.2: Sem juros
Fonte: www.lojaseller.com.br

É possível vender com parcelas a perder de vista pelo cartão de crédito, e sem cobrança de nenhum centavo de juros?

A maioria dos lojistas sabem que determinado produto vendido é - via de regra - parcelado, então se ele trabalha na política do "**n** vezes sem juros", os juros serão embutidos juntamente com a comissão da administradora do cartão, por isso sempre que o pagamento é "à vista" a tentativa do cliente é conseguir um desconto maior, mas nem sempre ele consegue um desconto maior do que 10%.

Sendo assim, as lojas antecipam a ação do cliente acrescentando juros, seja da operadora de cartões ou da margem de lucro determinada pela empresa. É da saúde financeira, dos lucros, que as empresas sobrevivem. Não há empresa (exceto as filantrópicas) que não visem o lucro como processo final de suas atividades.

Segundo Castanheira e Macedo (2010, p.167), devemos lembrar que como determina a lei 8.078/90 (Código de Defesa do Consumidor), a forma de aplicação do juro deve ser definida no contrato entre as partes.

Diante deste cenário, os juros são necessários para que as empresas tenham lucro nas operações de empréstimo, por exemplo. Emprestar dinheiro e cobrar por isso é bem lucrativo. Por outro lado aquele que recebe o empréstimo também se beneficia, pois consegue efetivar, finalizar o que necessitava e que não conseguia por falta de dinheiro.

7.2 Algumas definições usuais

"Juro é o valor que se paga pelo uso de dinheiro que se toma emprestado", refere-se ao quanto será acrescentado à parcela de compra para cobrir as despesas financeiras, que por vezes é uma das partes do lucro.

"Juro é o dinheiro produzido quando o capital é investido", refere-se à rentabilidade de fundos de investimento. Por exemplo, a poupança, títulos de capitalização, investimentos de alto e baixo risco.

Segundo Castanheira e Serenato (2008, p. 22), o juro é calculado por intermédio de uma taxa percentual aplicada sobre o capital que "sempre se refere a uma unidade de tempo: ano, semestre, bimestre, trimestre, mês, dia".

Os juros podem ser capitalizados segundo os regimes de Capitalização Simples ou Juros Simples e Capitalização Composta ou Juros Compostos.

Os juros podem ajudar (crescimento do patrimônio) ou atrapalhar (queda da qualidade de vida e do patrimônio); portanto dependendo de onde se faz um empréstimo pode-se resolver ou criar outro problema financeiro.

Figura 7.3: Bolsos vazios
Fonte: blog.timesunion.com

Escolher um Empréstimo Pessoal

Algumas opções para crédito pessoal é o cheque especial e o empréstimo pessoal. A questão é complicada porque quem precisa de dinheiro para já, ou daquele produto a ser comprado com prazo de se perder de vista, parece ignorar a questão de que vai pagar juros por querer resolver o seu problema na hora. É o que chamamos de imediatismo financeiro.

O que verdadeiramente sabemos é que não dá para contar com empréstimos para quitar dívidas de outros empréstimos já contraídos, definitivamente não é um bom negócio. **Se a pessoa gasta o que tem, não dá para vender o almoço para comprar a janta!**

Figura 7.4: Dinheiro feliz
Fonte: www.blogs.freshminds.co.uk

Figura 7.5: Frederich Gauss
Fonte: www.fotopedia.com

Curiosidade

Alguns ditos famosos sobre dinheiro e finanças:

"O dinheiro não tem a mínima importância, desde que a gente tenha muito."

(Truman Capote)

"Não tente pagar os seus impostos com um sorriso. Os fiscais preferem em dinheiro." (Autor desconhecido)

"Os jovens, hoje em dia, imaginam que o dinheiro é tudo e, quando ficam velhos, descobrem que é isso mesmo." (Oscar Wilde)

"Quando se trata de dinheiro, todos têm a mesma religião." (Voltaire)

"O dinheiro não nos traz necessariamente a felicidade. Uma pessoa que tem dez milhões de dólares não é mais feliz do que a que tem só nove milhões." (H. Brown)

"Dinheiro semeia dinheiro e o primeiro franco é, muitas vezes, mais difícil de ganhar que o segundo milhão." (Jean-Jacques Rousseau)

"Quando o dinheiro vai na frente, todos os caminhos se abrem."

(William Shakespeare)

"Dinheiro no banco é como a pasta de dentes: fácil de tirar, mas muito difícil de voltar a pôr." (Aldo Cammarota)

"O dinheiro é melhor do que a pobreza, nem que seja por razões financeiras." (Woody Allen)

"Quem não tem dinheiro, meios e paz, carece de três bons amigos."

(William Shakespeare)

"O dinheiro não pode comprar a felicidade, mas pode, com certeza, ajudar-nos a procurá-la nos melhores lugares." (David Biggs)

"Nada estabelece limites tão rígidos à liberdade de uma pessoa quanto à falta de dinheiro." (John Kenneth)

7.3 Relação entre razão e proporcionalidade: "regra de três"

- **Grandeza Diretamente Proporcional.**

Duas grandezas são diretamente proporcionais quando, aumentando uma delas, a outra também aumenta na mesma proporção, ou, diminuindo uma delas, a outra também diminui na mesma proporção.

Se duas grandezas X e Y são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante K tal que:

$$\frac{X}{Y} = K$$

Exemplo: Uma torneira foi aberta para encher uma caixa com água. A cada 15 minutos é medida a altura do nível de água. (cm = centímetros e min = minutos)

15 minutos **50cm**	**30 minutos** **100cm**	**45 minutos** **150cm**

Fonte: Elaborado pelo autor

Construímos uma tabela para mostrar a evolução da ocorrência:

Tempo (min)	Altura (cm)
15	50
30	100
45	150

Observamos que quando duplica o intervalo de tempo, a altura do nível da água também duplica e quando o intervalo de tempo é triplicado, a altura do nível da água também é triplicada. Desta maneira tiramos as seguintes conclusões:

- Quando o intervalo de tempo passa de 15 min para 30 min, dizemos que o tempo varia na razão 15/30, enquanto que a altura da água varia de 50 cm para 100 cm, ou seja, a altura varia na razão 50/100. Observamos que estas duas razões são iguais: $\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$
- Quando o intervalo de tempo varia de 15 min para 45 min, a altura varia de 50 cm para 150 cm. Nesse caso, o tempo varia na razão 15/45 e a altura na razão 50/150. Então, notamos que essas razões são iguais: $\frac{15}{45} = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}$
- Concluímos que a razão entre o valor numérico do tempo que a torneira fica aberta e o valor numérico da altura atingida pela água é sempre igual, assim dizemos então que a altura do nível da água é diretamente proporcional ao tempo que a torneira ficou aberta.

7.4 Proporcionalidade

- Regra de Três Simples

  É um processo prático para resolver problemas que envolvem quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Passos didáticos utilizados para resolver problemas com a regra de três simples

1º Passo: Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

2º Passo: Identificar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais.

3º Passo: Montar a proporção e resolver a equação.

Exemplo 1: Com uma área de absorção de raios solares de 1,2 m^2, uma lancha com motor movido à energia solar consegue produzir 400 watts por hora de energia. Aumentando-se essa área para 1,5 m^2, qual será a energia produzida?

Solução: montando a tabela:

Área (m^2)	Energia (Wh)
1,2	400
1,5	x

Identificação do tipo de relação:

Área	Energia
1,2	400 ↓
1,5	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o X.

Observe que: **Aumentando** a área de absorção, a energia solar **aumenta**.

Como as palavras correspondem (aumentando - aumenta), podemos afirmar que as grandezas são **diretamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos outra seta no mesmo sentido (para baixo) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

Área	Energia
1,2	400
1,5 ↓	x ↓

$$\frac{1,2}{1,5} = \frac{400}{x}$$

$$1,2x = 1,5.400$$

$$x = \frac{1,5.400}{1,2} = 500$$

Logo, a energia produzida será de **500 watts por hora.**

Exemplo 2: Um trem, deslocando-se a uma velocidade média de 400 km/h, faz um determinado percurso em 3 horas. Em quanto tempo faria esse mesmo percurso, se a velocidade utilizada fosse de 480 km/h?

Solução: montando a tabela:

Velocidade (Km/h)	Tempo (h)
400	3
480	x

Identificação do tipo de relação:

Velocidade	Tempo
400	3 ↓
480	x

Inicialmente colocamos uma seta para baixo na coluna que contém o X (2ª coluna).

Observe que: **Aumentando** a velocidade, o tempo do percurso **diminui**.

Como as palavras são contrárias (aumentando - diminui), podemos afirmar que as grandezas são **inversamente proporcionais**. Assim sendo, colocamos outra seta no sentido contrário (para cima) na 1ª coluna. Montando a proporção e resolvendo a equação temos:

Velocidade	Tempo
400 ↑	3 ↓
480	x

$$\frac{3}{x} = \frac{480}{400}$$

Invertemos os termos

$$480x = 3.400$$

$$x = \frac{3.400}{480} = 2,5$$

Logo, o tempo desse percurso seria de 2,5 horas ou 2 horas e 30 minutos.

Um pouco da história das expressões algébricas.

Na Antiguidade, as letras foram pouco usadas na representação de números e relações. De acordo com fontes históricas, os gregos Euclides e Aristóteles (322-384 a.C), usaram as letras para representar números. A partir do século XIII, o matemático italiano Leonardo de Pisa (Fibonacci), autor do livro *Liber Abaci* (Livro do Ábaco) aborda a arte de calcular. Observamos neste livro alguns cálculos algébricos.

O grande uso de letras, para resumir mais racionalmente o cálculo algébrico, passou a ser estudado pelo alemão Stifel (1486-1567), pelos italianos Germano (1501-1576) e Bombelli (autor de *Álgebra* publicada em 1572). Porém, foi o francês François Viéte (1540-1603), quem introduziu o uso ordenado de letras nas analogias matemáticas, quando desenvolveu o estudo do cálculo algébrico.

Expressões algébricas

São expressões matemáticas que apresentam letras e podem conter números. São também denominadas expressões literais. Por exemplo:

A = 2a+7b

B = (3.c+4)-5

C = 23.c+4

As letras nas expressões são chamadas de variáveis; o que significa que o valor de cada letra pode ser substituído por um valor numérico.

Nas operações em uma expressão algébrica, quando substituímos uma variável por um número, obedecemos à seguinte ordem de resolução, é importante observar **que nada mais é que um modo objetivo de poupar cálculos com adições e multiplicações sucessivas**:

1. Potenciação ou Radiciação;

2. Multiplicação ou Divisão;

3. Adição ou Subtração.

Observações quanto à prioridade

1. Antes de cada um dos passos citados, deve-se realizar a operação que estiver dentro dos parênteses, colchetes ou chaves, justamente por estes indicarem o que vem primeiro em uma expressão algébrica/numérica.

2. A multiplicação pode ser indicada por “×” ou por um ponto “•” ou às vezes sem sinal, desde que fique clara a intenção da expressão.

3. Muitas vezes devemos utilizar parênteses quando substituímos variáveis por valores negativos. Tal procedimento evita que se "percam" os sinais negativos das relações financeiras.

Exemplos:

Consideremos **P** = 2A + 10 e tomemos **A** =5. Assim temos: **P** = 2.5+10 = 10+10 = 20.

Aqui **A** é a variável da expressão, 5 é o valor numérico da variável, e 20 é o valor numérico da expressão indicada por **P**. Observe que ao mudar o valor de **A** para 9, teremos: **A** = 2.9 + 10 = 18 + 10 = 28; se **A** = 9, o valor numérico de **P** = 2A +10 é igual a 28.

Seja X = 4A + 2 + B - 7 e tomemos A = 5 e B=7. Assim temos: X = 4.5 + 2 + 7 - 7 = 20 + 2 - 0 = 22

Se A = 5 e B = 7, o valor numérico de X = 4A + 2 + B - 7, é igual a 22.

Seja Y = 18 - C + 9 + D + 8 C, onde C = -2 e D =1. Então: Y = 18 - (-2) + 9 + 1 + 8 (-2) = 18 + 2 + 9 + 1 - 16 = 30 - 16 = 14. Se C=-2 e D = 1, o valor numérico de Y = 18 - C + 9 + D + 8C, é igual a 14.

Através desses exemplos concluímos que o valor numérico de uma expressão algébrica é o valor obtido na expressão, quando substituímos a variável por um número real.

Resumo

Nesta aula vimos que os juros são reconhecidos como linguagem própria para representar diversas aplicações de capitalização na Matemática Financeira. É importante lembrar que o fator tempo (temporalidade) é fundamental para que se tenha entendimento de quanto se recebe ou se perde por uma aplicação financeira.

Aula 8 – Os juros simples, a progressão aritmética e as funções

Nesta aula mostraremos o conceito de progressão aritmética e de funções, possibilitando assim uma melhor compreensão dos juros a serem calculados nas operações financeiras.

8.1 Um pouco sobre a Progressão Aritmética (PA)

Considere as seguintes sequências de números:

I. 3, 7, 11,...

II. 2, 6, 18,...

III. 2, 5, 10, 17,...

O número que continua cada uma das sequências na ordem dada deve ser respectivamente

15, **54** e **26**, pois a sequência I tem razão igual a 4, pois, 3 $\to$ 7 $\to$ 11 $\to$**15** "vai de 4 em 4" a razão da progressão é 4, ou a diferença entre 7 e 3 é igual a 4.

A sequência II não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em fatores que são obtidos **multiplicando** os termos por três. Sendo assim: 2 $\to$ 6 $\to$ 18 $\to$ **54**.

A sequência III não é uma PA, pois, a lei de formação se dá em somas de números ímpares distintos (+ 3, +5, +7, +9). Sendo assim: 2 $\to$ 5 $\to$ 10 $\to$ 17 $\to$ **26**.

Toda a lei de formação com números em sequência em que **a diferença entre um número e seu anterior é constante** recebe o nome de Progressão Aritmética, ou, simplificadamente, é conhecida pela abreviatura **PA**

A diferença entre os termos é chamada de **razão** r.

Fórmula do *enésimo* termo

Pela definição de PA, a fórmula do segundo termo é:

a_2+a_1+r

$a_3 = a_2+r$

$a_3 = a_1+r+r$

$a_3=a_1+2r$

$a_4=a_3+r$ ...

$a_4 = a_1+2r+r$

$a_4=a_1+3r$

Logo se pode deduzir que para um termo qualquer a_n :

$$\boxed{a_n = a_1+(n-1)r}$$

8.2 Progressão Aritmética versus Juros simples

O regime de capitalização simples corresponde a uma progressão aritmética (PA), onde os juros crescem de forma constante ao longo do tempo. Como veremos no gráfico seguinte, um capital de R$1.000,00 aplicado por dez meses a uma taxa de 10% a.m., acumula um montante de R$2.000,00 no final.

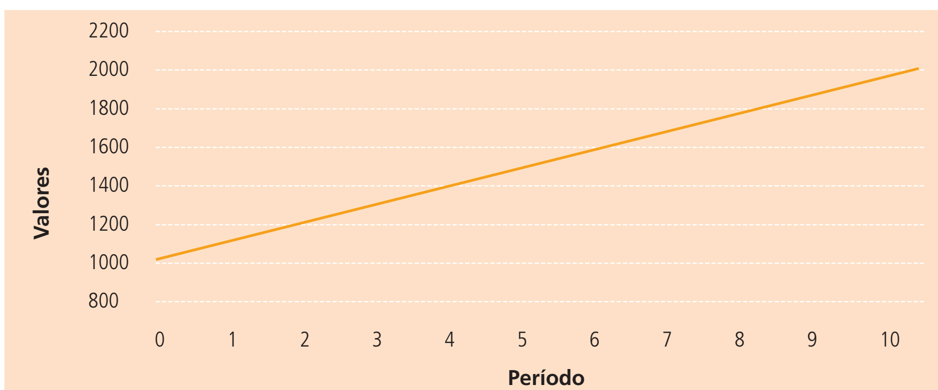


Figura 8.1: Gráfico
Fonte: Elaborado pelo autor

O gráfico representa uma função polinomial do 1° grau, usualmente chamada de função afim, que será vista com mais detalhes na aula seguinte. Note que o primeiro valor assumido pela função é igual a R$1.000,00; e com o passar dos 10 meses, a função vai assumindo os valores de uma PA (1.000; 1.100; 1.200; . . . ; 2.000) cuja razão vale R$100,00 (os juros).

Segundo Souza e Clemente (2000), o juro representa o custo da imobilização de uma unidade capital por certo período de tempo. Normalmente, o juro é expresso através de uma taxa que incide sobre o valor imobilizado (base).

- O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de valor presente ou capital "C".
- A taxa de porcentagem que se paga ou se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada taxa de juros "J".
- O tempo **n** deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida a taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
- O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado de valor futuro ou montante "M".

8.3 Fórmula para cálculo do juro simples

Para calcular os juros simples de um valor presente ou capital "C", durante "t" períodos com a taxa percentual "i", utilizamos uma variação temporal da função linear:

$$\boxed{f(t) = a.t} \quad \rightarrow \quad \boxed{J = C.i.t}$$

Note a semelhança da fórmula f(t) com a fórmula J

8.4 Fórmula para cálculo do montante

Para calcular o valor futuro ou montante "M", durante "t" períodos com uma taxa percentual "i", sobre um valor presente ou capital "C", utilizamos uma variação temporal da função afim:

$$\boxed{f(t) = a.t + b} \rightarrow \boxed{M = J + C} \rightarrow \boxed{M = C.i.t + C}$$

Note a semelhança da fórmula f(t) com a fórmula M, que pode evoluir para:

$$\boxed{M = C.(1 + i.t)}$$

Exemplo 1

Qual o montante de um capital de R$1.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 10 % ao ano pelo prazo de 2 anos ?

Dados: $C = 1.000$

$i = 10\% = 0{,}1$

$t = 2$ anos

$M = ?$

$M = C.(1 + i.\ t)$

$M = 1.000.(1 + 0{,}1.\ 2)$

$M = 1.000.\ (1 + 0{,}2)$

$M = 1.000.\ (1{,}2)$

$M = 1.200$

O montante, após 2 anos, a taxa de juros simples de 10 % ao ano, será de R$1.200,00.

Exemplo 2

Qual o valor de um capital que, aplicado à taxa de juros simples de 2% ao mês, rendeu depois de um ano R$240,00 de juros?

Como a taxa mensal é 2% = 0,02, devemos considerar, para o tempo de 1 ano, 12 meses, pois tempo e taxa devem estar na referência temporal (neste caso em meses). Assim:

$J = C.\ i\ .t$

$240 = C\ .\ 0{,}02.\ 12$

$240 = C\ .\ 0{,}24$

$$C = \frac{240}{0,24}$$

$$C = 1000$$

O capital aplicado inicialmente foi de R$1.000,00.

Ao trabalhar com as fórmulas de juros simples devemos nos atentar para algumas particularidades:

a) A taxa percentual "i" deve ser OBRIGATORIAMENTE transformada em coeficiente (forma decimal). Por exemplo, se a taxa for de (10%), devemos dividi-la por 100, transformando-a no coeficiente (0,10);

Em Resumo

Forma Percentual	Transformação	Forma Decimal
12% a.a.	$\frac{12}{100}$	0,12
0,5% a.m.	$\frac{0,5}{100}$	0,005

b) Se o período e a taxa de juros não possuírem o mesmo referencial temporal, deve ser feita a conversão de um deles (preferencialmente o mais fácil). Por exemplo, uma taxa de 5% a.m. e o período de 2 anos necessitam ser convertidos: a taxa para ano ou o período para mês:

1ª Opção: convertendo o período para mês (2 anos equivalem a 24 meses). Portando, teríamos a mesma referência temporal (taxa mensal de 5% e o período de 24 meses).

2ª Opção: convertendo a taxa para anos (1 mês equivale a $\frac{1}{12}$ anos). Portando, teríamos a mesma referência temporal (taxa anual de 0,41% e período de 2 anos).

Exemplo 3

Um empréstimo de R$10.000,00 rendeu juros simples de R$2.700,00 ao final de 6 meses. Qual a taxa mensal de juros do empréstimo?

Dados: C = 10.000

J = 2.700

$t = 6$ meses

$i = ?$

$J = C. i .t$

$$i = \frac{J}{C.t}$$

$$i = \frac{2.700}{10.000 \times 6}$$

$$i = \frac{2.700}{60.000}$$

$i = 0,045$

$i = 4,5\%$

A taxa de juros do empréstimo foi de 4,5% ao mês.

Exemplo 4

Determinar o montante correspondente a uma aplicação de R$450.000,00 por 225 dias com taxa de juros simples de 5,6% ao mês.

Dados: $C = 450.000$

$i = 5,6\%$ ao mês

$t = 225$ dias

$M = ?$

Antes de alimentarmos a fórmula do montante com os dados, precisamos converter, pois a taxa está em meses e o período está em dias:

1ª Opção: convertendo o período para mês (1 mês equivale a 30 dias). Portando, teríamos a mesma referência temporal (taxa mensal de 5,6% e o período de $\frac{225}{30}$ meses).

2ª Opção: convertendo a taxa para dias (1 dia equivale a $\frac{1}{30}$ meses). Portando, teríamos a mesma referência temporal (taxa diária de $\frac{5.6}{30}$ % e período de 225 dias).

Resolvendo pela 1ª opção:

$M = C.(1 + i\ .t)$

$M = 450.000.(1 + 0{,}056.\ \dfrac{225}{30}\ )$

$M = 450.000.(1 +.\ \dfrac{12{,}6}{30}\ )$

$M = 450.000.(1 + 0{,}42)$

$M = 450.000.(1{,}42)$

$M = 639.000$

Resolvendo pela 2ª opção:

$M = C.(1 + i\ .t)$

$M = 450.000.(1 + \dfrac{0{,}056}{30}\ .225)$

$M = 450.000.(1 + 0{,}42)$

$M = 450.000.(1{,}42)$

$M = 639.000$

O montante será de R$639.000,00

Resumo

Nesta aula estudamos o conceito de progressão aritmética que possibilita uma melhor compreensão dos juros bem como a sua representação por meio de uma função afim do tipo temporal.

Aula 9 – Os juros simples, a progressão aritmética e as funções - II

O objetivo agora consiste no intenso treinamento do conceito de juros simples através de exercícios resolvidos e de aprendizagem, sendo estes últimos considerados primordiais na sua resolução.

Exercício 1

Um investidor aplicou R% 15.000,00 à taxa de juro simples de 30% a.a. Sendo assim, qual será o juro obtido ao fim de 80 dias?

Solução:

Como a unidade da taxa está em anos e o período está em dias, vamos converter o número de dias em anos.

$t = 80 \text{ dias} = \frac{80}{360} = \frac{2}{9} \text{ ano}$

$J = C.i.t \text{ ; } J = 15.000 \text{ . } 0{,}30 \text{ . } \frac{2}{9} \text{ ; } J = 1.000$

Resposta:

R$1.000,00

Exercício 2

Determine o prazo em que duplica um capital aplicado à taxa de juro simples de 4% a.m.

Resolução:

Para que um capital C se transforme em um montante M = 2C, deveremos ter:

$M = 2C$

$i = 4\% \text{ a.m.} = 0{,}04$

$M = C + J$; $M = C + C.i.t$; $M = C.(1 + i.t)$

Substituindo M por 2C e i por 0,04, obteremos:

$2C = C.(1 + 0{,}04.t)$; $2 = 1 + 0{,}04.t$; $0{,}04.t = 1$; $t = 25$ meses

Resposta:

25 meses

Exercício 3

Um capital de R$8.000,00, aplicado durante 6 meses, resulta em um montante de R$9.200,00. Sendo assim, determine a taxa mensal de juro simples dessa aplicação.

Resolução:

$M = 9.200$

$C = 8.000$

$t = 6$ meses

Utilizando a fórmula do montante simples $M = C.(1 + i.t)$, teremos:

$9.200 = 8.000.(1 + 6.i)$; $1{,}15 = 1 + 6.i$; $0{,}15 = 6.i$; $i = \dfrac{0{,}15}{6}$

$i = 0{,}025 = 2{,}5\%$ a.m.

Resposta:

A taxa mensal é de 2,5%

Atividades de aprendizagem

1. Qual é o juro simples que um capital de R$7.000,00 rende quando aplicado:

a) durante 2 meses, a uma taxa de 2,5% a.m.?

R: (R$350,00)

b) durante 1 ano, a uma taxa de 1,5% a.m.?

R: (R$1.260,00)

c) durante 3 meses, a uma taxa de 0,075% a.d.?

R: (R$472,50)

2. (UEPI) Um investidor aplicou 30% do seu capital a juro simples de 1,5 a.m., durante um ano. O restante foi aplicado a juro simples, durante um ano a, à taxa de 2% a.m. Se o total de juros recebidos foi de R$1.776,00, qual era o capital do investidor?

a) R$5.000,00

b) R$6.000,00

c) R$7.000,00

d) 8.000,00

e) 9.000,00

R: (d)

Aula 10 – A progressão geométrica

Na aula de hoje estudaremos as progressões geométricas, fundamentais para calcular a remuneração recebida pela aplicação sob regime de capitalização composta, onde após cada período os juros são incorporados ao principal e passam, por sua vez, a render juros. Também conhecido como "juros sobre juros".

Para que ocorram "juros sobre juros" levaremos em consideração o conceito de Progressão Geométrica (PG).

Podemos definir progressão geométrica, ou simplesmente PG, como uma sucessão de números reais obtida, com exceção do primeiro, multiplicando o número anterior por uma quantidade fixa q, chamada razão.

Para calcular a razão da progressão, caso ela não esteja suficientemente evidente, divide-se entre si dois termos consecutivos. Por exemplo, na sucessão (1, 2, 4, 8,...), q = 2, pois 4 : 2 = 2 ou 8 : 4 = 2 e assim sucessivamente.

Termo geral de uma PG:

O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 \times q^{n-1}$ e indica que, para obter um termo de posição n de uma PG, basta multiplicar o primeiro termo a1 pela razão q elevada a (n – 1).

10.1 Exemplos de Progressões Geométricas:

1. (8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024) é uma PG de 8 termos, com razão 2, pois a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 16 : 8 = 2.

2. (5, 15, 45,135) é uma PG de 4 termos, com razão 3, pois a divisão entre o segundo e primeiro termo é igual a 15 : 5 = 2.

10.2 Exercícios resolvidos

1. Calcular o 1° termo de uma PG cujo 6° termo vale 1 e a razão 2.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$

$n = 6$

$q = 2$

$a_6 = 1$

Resolvendo:

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_6 = a_1 . q^{6 - 1} = a1 . 25 = 1$

$a_1 = 1/32$

2. Calcular o 1° termo de uma PG cujo 5° termo vale 2 e a razão 3.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1 = ?$

$n = 5$

$q = 3$

a5 = 2

Resolvendo:

$a_n = a_1 . q^{n-1}$

$a_5 = a_1 . q^{5 - 1} = a_1 . 24 = 2$

a1 = 2/24

$a_1 = 1/12$

3. Sendo 32 o primeiro termo de uma PG e 2 é a sua razão, calcule o termo de ordem 8.

Retirando os valores do enunciado:

$a_1=32$

$q=2$

$a_8=?$

$n=8$

Resolvendo:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$a_8 = a_1 . q^{8-1}$

$a_8=32.2^7$

$a_8=32.128$

$a_8= 4.096$

Resumo

Iniciamos o estudo, por meio de exemplos resolvidos, das progressões geométricas, essenciais ao entendimento do regime de capitalização composta.

Anotações

Aula 11 – Juros Compostos *versus* Função Exponencial

O objetivo da aula é estudar a relação entre os juros compostos e a função exponencial, fundamental para o entendimento do rápido crescimento do montante nas aplicações financeiras.

11.1 Exemplo

Capital de R$500,00; juros de 1% a.m. período de 4 meses.

Tabela 11.1: Demonstração

Período	Capital	Taxa	Juros	Montante
1	500	0,01	5	505
2	505	0,01	5,05	510,05
3	510,05	0,01	5,10	515,15
4	515,15	0,01	5,15	520,30

Fonte: Elaborado pelo autor

1º período: $M_1 = C + Ci = C\ (1 + i\ )$

2º período: $M_2 = M_1 + M_1.i$

Logo: $C\ (1+ i\ ) + C\ (1+ i).\ i$

$$C\ (1 + i\ ).\ (1 + i\ ) = C\ (1 + i)^2$$

3º período: $M_3 = M_2 + M_2.\ i = C(1 + i)^3$

4º período: $M_4 = M_3 + M_{3.i} = C(1 + i)^4$

Por indução finita, chegamos à fórmula geral de juros compostos:

$\boxed{M = C.(1+i)^n}$ Fórmula análoga a do termo geral de uma PG:

$\boxed{a_n = a_1.q^{n-1}}$

Onde M = montante, C = capital inicial, i = taxa de juros e n = número de períodos (pode também ser representado pela letra “t”).

Percebam que agora o número de períodos (n) é um expoente (nos juros simples só havia multiplicações), mostrando que os juros sobre juros terão uma forma exponencial no longo prazo.

Na fórmula de juros (simples ou compostos), as unidades de tempo referentes à taxa de juros (i) e do período (n), tem de ser necessariamente iguais. Este é um detalhe importantíssimo, que não pode ser esquecido! Assim, por exemplo, se a taxa for 2% ao mês e o período 3 anos, deveremos considerar 2% ao mês durante 36 meses (3 x 12 = 36 meses).

Relembrando!

Na aula 9 aplicamos um capital de R$1.000 por dez meses a uma taxa de 10% a.m., acumulando um montante de R$2.000 no final. Mas e se fossem a juros compostos?

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = 1.000,00 i = 10% a.m. (ao mês) n = 10 meses M = ?

$M = C \times (1 + i)^n$

$M = 1.000 \times (1 + 0,1)^{10}$

$M = 1.000 \times (1,1)^{10}$

$M = 1.000 \times 2,59374$

$M = 2.593,74$

O montante é R$2.593,74 e o gráfico fica representado pela função exponencial:

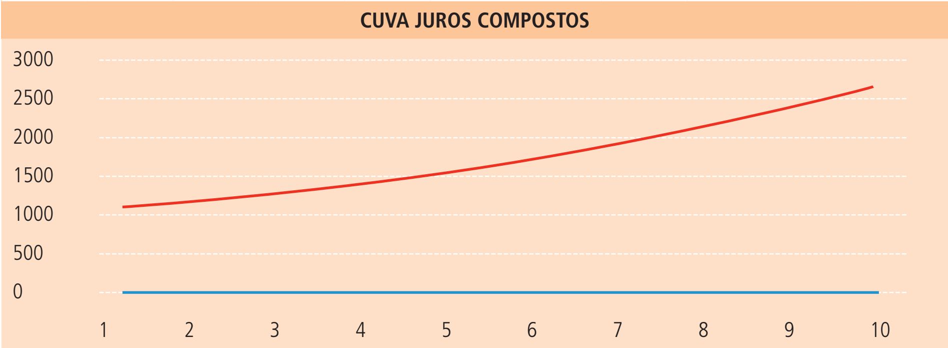


Figura 11.1: Curva juros compostos
Fonte: elaborado pelo autor

Resumo

Nesta aula estudamos a importante relação entre a progressão aritmética e a função do tipo exponencial que possibilita uma melhor compreensão dos juros no regime de capitalização composta.

Anotações

Aula 12 – Juros Compostos *versus* Função Exponencial - II

Nesta aula teremos o treinamento do conceito de juros compostos através de exercícios resolvidos e de aprendizagem, sendo estes últimos considerados primordiais na sua resolução por parte dos alunos deste curso.

Exercício 1

Um investidor aplicou R$14.000,00 a juro composto de 2% a.m. Sendo assim, quantos reais terá após 8 meses de aplicação?

Solução:

Sabendo que o dinheiro aplicado (capital) C = 14.000 e que a cada mês são creditados 2% de juros, temos:

$C = 14.000$

$t = 8$ meses

$i = 2\%$ a.m. $= 0{,}02$

Substituindo os valores na fórmula do montante composto $M = C.(1 + i)^t$, obteremos:

$M = 14.000.(1 + 0{,}02)^8$; $M = 14.000.(1{,}02)^8$; $M = 14.000.1{,}1717$

$M = 16.403{,}23$

Resposta:

Após 8 meses, ele terá R$16.403,23

Exercício 2

Calcule o juro composto que será obtido na aplicação de R$25.000,00 a 25% a.a., durante 72 meses.

Solução:

Inicialmente, vamos calcular o montante dessa aplicação. Do enunciado, temos:

$C = 25.000$

$i = 25\%$ a.a. $= 0,25$

$t = 72$ meses $= \frac{72}{12} = 6$ anos

Usando a fórmula do montante:

$M = C.(1 + i)^t$; $M = 25.000.(1 + 0,25)^6$; $M = 25.000.(1,25)^6$; $M = 25.000.3,8147$

$M = 95.367,43$

Como o montante é igual ao capital incorporado aos juros:

$M = C + J$; $J = M - C$; $J = 95.367,43 - 25.000$

$J = 70.367,43$

Resposta:

Será obtido um juro de R$70.367.43

Comente com seus colegas a possibilidade de resolver este problema de outra maneira.

Exercício 3

Uma pessoa aplicou R$10.000,00 a juro composto de 1,8% a.a. Após quanto tempo terá um total de R$11.534,00?

Solução:

C = 10.000

i = 1,8% a.m. = 0,018

M = 11.534

Usando a fórmula do montante:

$M = C.(1 + i)^t$; $11.534 = 10.000.(1 + 0,018)^t$; $1,018^t = \frac{11534}{10.000}$; $1,018^t = 1,1534$

t = 8

Resposta:

Logo, após 8 meses de aplicação, ela terá um montante de R$11.534,00

Atividades de aprendizagem

1. Uma dívida de R$2.000,00 deverá ser paga 3 meses antes do seu vencimento, em 20 de dezembro. Sabendo que a taxa de juro para essa dívida é de 5% m., em regime de juro composto, qual deverá ser o valor do desconto?

R = (R$272,88)

2. (UEM-PR) A taxa de juros de uma aplicação financeira é de 2% a.m.; aplicando-se R$100,00 a essa taxa, é incorreto afirmar que:

a) após 5 meses, haverá R$110,00

b) após 3 meses, haverá mais que R$106,00

c) depois de um mês, haverá R$102,00

d) se, no final de cada mês, forem retirados R$2,00, após 6 meses o máximo que poderá ser sacado será de R$102,00

e) após 4 meses, o capital inicial terá sofrido um acréscimo de mais de 8%.

R: (a)

3. (IBMEC) Investindo-se um capital a uma taxa de juros mensais de 7%, em regime de capitalização composta, em quanto tempo o capital inicial dobrará?

a) 10 meses

b) 11 meses

c) 12 meses

d) 13 meses

e) 14 meses

R: (a)

4. (Unesp-SP) Um capital de R$1.000,00 é aplicado durante 4 meses.

a) Encontre o rendimento da aplicação no período considerando a taxa de juro simples de 10% a.m.

R = (R$400,00)

b) Determine o rendimento da aplicação no período considerando a taxa de juro composto de 10% a.m.

R = (R$464,10)

Aula 13 – Juros compostos, exercícios resolvidos e revisão

Nesta aula faremos a revisão de juros compostos por meio de exercícios práticos e cotidianos das relações financeiras com o mercado das finanças pessoais e empresariais.

1. Aplicou-se a juros compostos um capital de R$1.400.000.00, a 4% ao mês, durante 3 meses. Determine o montante produzido neste período.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = 1.400.000,00 i = 4% a.m. (ao mês) n = 3 meses M = ?

$M = C \times (1 + i)^n$

$M = 1.400.000 \times (1 + 0,04)^3$

$M = 1.400.000 \times (1,04)^3$

$M = 1.400.000 \times 1,124864$

$M = 1.574.809,600$

O montante é R$1.574.809,600

Obs.: devemos lembrar que 4% = 4/100 = 0,04

2. Qual o capital que, aplicado a juros compostos a 8% ao mês, produz em 2 meses um montante de R$18.915,00 de juros.

Separando os dados fornecidos no enunciado do problema:

C = ? i = 8% a.m. (ao mês) n = 2 meses M = 18.915,00

Obs.: devemos lembrar que 8% = 8/100 = 0,08

$M = C \times (1 + i)^n$

$18.915 = C \times (1 + 0,08)^2$

$18.915 = C \times (1,08)^2$

$18.915 = C \times 1,1664$

$C = 18915 : 1,1664$

C = 16.216,56379 que é aproximadamente igual a C = R$16.216,56.

3. A que taxa ao mês esteve aplicado, em uma caderneta de poupança, um capital de R$1.440,00 para, em 2 meses, produzir um montante de R$1.512,90?

C = 1.440,00 i = ? % a.m. (ao mês) t = 2 meses M = 1.512,90

$M = C \times (1 + i)^n$

$1512,90 = 1440 \times (1 + i)^2$

$(1 + i)^2 = 1512,90 : 1440$

$(1 + i)^2 = 1,050625$

$1 + i = \sqrt{1,050625}$

$1 + i = 1,025$

$i = 0,025\ (\times 100)$

$i = 2,5\%$

A taxa é 2,5% ao mês

A grande diferença dos juros é que no final das contas quem financia por juros simples obtém um montante (valor total a pagar) inferior ao que financia por juros compostos.

Vamos comparar as duas aplicações de capitalização (simples e composto) para um mesmo valor de capital aplicado.

Lembre que a fórmula do Juro Simples é: **J = C. i. t** ou **J = C.i.n**

Onde:

J = juros, **C** = capital, **i** = taxa, **n** ou **t** = tempo.

Considerando que uma pessoa empresta para outra a quantia de R$2.000,00, a juros simples, pelo prazo de 3 meses, à taxa de 3% ao mês. Quanto deverá ser pago de juros?

Antes de iniciarmos a resolução deste problema, devemos retirar do enunciado os dados necessários a resolução do problema:

Capital aplicado (C): R$2.000,00

Tempo de Aplicação (t): 3 meses

Taxa (i): 3% ou **0,03** ao mês (a.m.)

Fazendo o cálculo, teremos:

$J = c \cdot i \cdot t \rightarrow J = 2.000 \times 3 \times 0{,}03 \rightarrow$ R$180,00

Quer dizer que ao final do empréstimo, ao final dos três meses, a pessoa pagará R$180,00 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, o valor dos juros será de R$60,00 por mês e esse valor será somado mês a mês, nunca mudará.

Agora e se fossem juros compostos?

A fórmula dos Juros Compostos é: $\mathbf{M = C.\ (1 + i)^n}$

Onde:

M = Montante, C = Capital, **i = taxa de juros**, n ou **t = tempo**.

Considerando o mesmo problema anterior, da pessoa que emprestou R$2.000,00 a uma taxa de 3% (0,03) durante 3 meses, em juros simples, teremos:

Capital Aplicado (C) = R$2.000,00

Tempo de Aplicação (t) = 3 meses

Fazendo a conversão para decimal: taxa de Aplicação (i) = 0,03 (3% ao mês)

Fazendo os cálculos, teremos:

$M = 2.000.(1 + 0,03)^3 \rightarrow M = 2.000 \ . \ (1,03)^3 \rightarrow M = R\$2.185,45$

Ao final do empréstimo, a pessoa pagará R$185,45 de juros.

Observe que se fizermos a conta mês a mês, no primeiro mês ela pagará R$60,00, no segundo mês ela pagará R$61,80 e no terceiro mês ela pagará R$63,65.

Ou seja, no primeiro mês o juro corresponde a R$60,00; no segundo mês o juro corresponde a R$61,80; e no terceiro mês o juro corresponde a R$63,65.

No final das contas no regime de juros simples o montante seria de R$2.180,00 (pagaria os R$2000,00 + R$180,00 de juros). Já no caso dos juros compostos o montante seria de R$2.185,45 (pagaria os R$2000,00 + R$185,45 de juros).

Quando usamos juros simples e juros compostos?

A maioria das operações envolvendo dinheiro utiliza juros compostos. Estão incluídas: compras a médio e longo prazo, compras com cartão de crédito, empréstimos bancários, as aplicações financeiras usuais como Caderneta de Poupança e aplicações em fundos de renda fixa, etc. Os bancos utilizam os juros compostos, é o modo dessas Instituições lucrarem com a concessão de crédito, financiamentos, todas as operações bancárias envolvem juros e riscos. As operações de baixo risco rendem pouco juro e as de alto risco rendem mais juros.

Raramente encontramos uso para o regime de juros simples: é o caso das operações de curtíssimo prazo, e do processo de desconto simples de duplicatas. Tal fato ocorre dado o risco de se emprestar dinheiro e não receber o pagamento pela dívida, como o risco de uma pessoa (ou empresa) contrair uma dívida alta e não poder pagar, as instituições financeiras optam por regimes mais rentáveis de cobrança de juros.

Conclusão: **Relação entre juros e progressões**

→ Em um regime de capitalização a **juros simples**, o saldo cresce em **progressão aritmética**;

→ Em um regime de capitalização a **juros compostos** o saldo cresce em **progressão geométrica**;

O gráfico a seguir mostra a relação entre juros simples e compostos de modo comparativo:

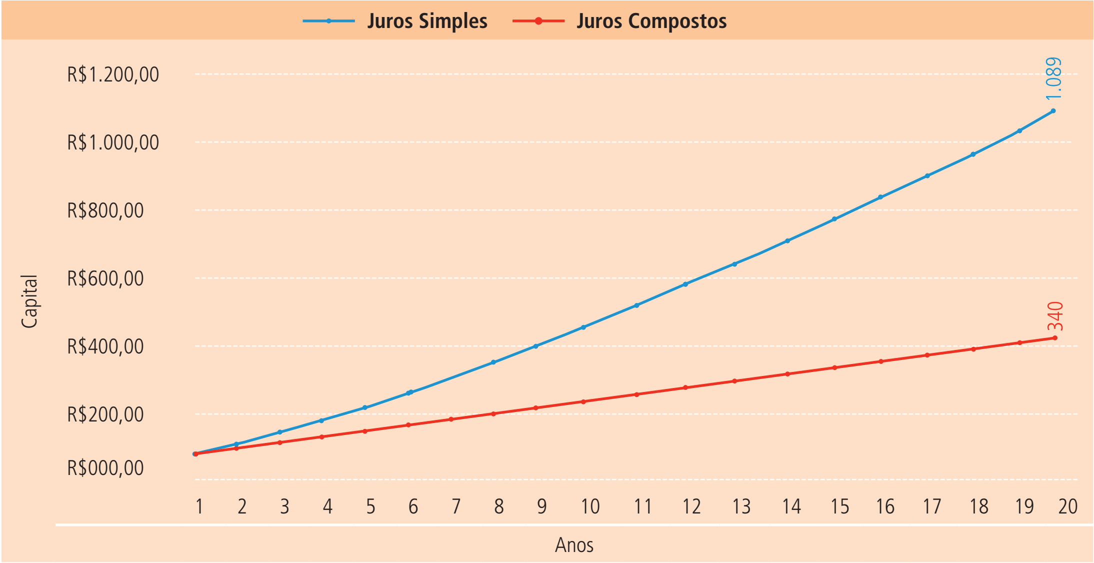


Figura 13.1: Comparativo
Fonte: Elaborado pelo autor.

Resumo

Estudamos, por meio de exercícios resolvidos, os juros compostos, fundamental para o entendimento do rápido crescimento do montante nas aplicações financeiras.

Aula 14 – Equivalência de taxas

Trataremos da conversão de taxas equivalentes. Você aprenderá a transformar taxas para períodos distintos e equivalentes e classificar os tipos de taxas de acordo com o período observado e condições político-econômicas.

Acompanhe a citação:

> "No mercado financeiro brasileiro, mesmo entre os técnicos e executivos, reina muita confusão quanto aos conceitos de taxas de juros principalmente no que se refere às taxas nominal, efetiva e real. O desconhecimento generalizado desses conceitos tem dificultado o fechamento de negócios pela consequente falta de entendimento entre as partes. Dentro dos programas dos diversos cursos de Matemática Financeira existe uma verdadeira 'poluição' de taxas de juros." (SOBRINHO, 2000)

Interessou? Vamos estudar a questão com maior profundidade e verificar qual seria a melhor definição para as taxas e aplicações no mercado de finanças.

14.1 Taxas equivalentes

Duas taxas $\mathbf{i}_1$ e $\mathbf{i}_2$ são equivalentes e aplicadas ao mesmo Capital © durante o mesmo período de tempo, através de diferentes sistemas de capitalização, produzem o mesmo Montante (M).

Sendo assim em um ano a relação entre taxa mensal e anual é expressa por:

$$\mathbf{1 + i_a = (1 + i_m)^{12}}$$

Ampliando a lógica, podemos concluir que a relação entre taxa semestral e anual é expressa por:

$$\mathbf{1 + i_a = (1 + i_s)^{6}}$$

Exemplos:

1. Qual a taxa anual equivalente a 8% ao semestre?

Solução:

$1 + i_a = (1 + i_s)^2$

$1 + i_a = (1 + 0{,}08)^2$

$1 + i_a = 1{,}1664$

$i_a = 0{,}1664 = 16{,}64\%$ a.a.

Ocorre que por conta dos juros serem em regime composto a conversão entre semestre e ano não é exatamente "o dobro de". No nosso exemplo, a taxa semestral de 8% não é igual a duas vezes oito.

2. Qual a taxa anual equivalente a 0,5% ao mês?

Solução:

$1 + i_a = (1 + i_m)^{12}$

$1 + i_a = (1 + 0{,}005)^{12}$

$1 + i_a = 1{,}0616$

$i_a = 0{,}0616 = 6{,}16\%$ a.a.

Da mesma maneira ocorre que por conta dos juros serem em regime composto a conversão entre mês e ano não são exatamente 12 x 0,5 = 6. Existe um acréscimo por conta do regime de capitalização composto.

14.2 A Taxa Nominal

A taxa nominal é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital não coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 340% ao semestre com capitalização mensal.

- 1150% ao ano com capitalização mensal.

- 300% ao ano com capitalização trimestral.

Exemplos:

1. Uma taxa de 15% a.a. com capitalização mensal terá 16,08% a.a. como taxa efetiva:

$\frac{15}{12} = 1{,}25 \rightarrow$ 1 ano equivale a 12 meses

$1{,}25^{12} = 1{,}1608 \rightarrow$ 12 períodos de capitalização composta

2. Qual o montante de um principal de R$15.000,00, no fim de 1 ano, com juros de 12% a.a./a.t.

Calculadoras científicas têm teclas que operam com expoentes e base no valor que desejar, sendo assim (1,03)4 = 1,125508810 aproximadamente 1,125.

Solução:

C = R$15.000,00

n = 1 ano

i = 12% a.a./a.t.

x = 4 (um ano possui 4 trimestres)

$i_x = \frac{i}{x}$

Assim temos:

$i_4 = \frac{0{,}12}{4} = 0{,}03\ a.t.$

n = 1 ano, sabendo que um ano tem 4 trimestres.

$M = C.(1 + i)^n$

$M = 15.000 \,.\, (1 + 0{,}03)^4$

$M = 15.000 \,.\, 1{,}1255$

M = **R$16.882,50**

14.3 A Taxa Efetiva

A Taxa Efetiva é quando o período de formação e incorporação dos juros ao Capital coincide com aquele a que a taxa está referida. Alguns exemplos:

- 140% ao mês com capitalização mensal.

- 250% ao semestre com capitalização semestral.

- 1250% ao ano com capitalização anual.

Resumo

Você aprendeu nesta aula a transformar taxas para períodos distintos e equivalentes, a classificar os tipos de taxas de acordo com o período observado e condições político-econômicas, e a tomar cuidado em verificar se a capitalização envolvida é simples ou composta.

Anotações

Aula 15 – A taxa real

O objetivo desta aula é conhecer outro tipo de taxa mais adequada ao mercado financeiro: a taxa real.

15.1 Taxa real

É a taxa efetiva corrigida pela taxa inflacionária do período da operação, podendo ser inclusive negativa.

15.1.1 O caso BBB

Vamos analisar uma situação bem popular no Brasil: o caso BBB.

Milhões de brasileiros assistiram, pelo menos em parte, o Big Brother Brasil nas suas diversas edições. Não foi em vão que esse programa atingiu altos índices de audiência. O prêmio de R$1.500.000,00 atrai várias pessoas para participar do programa e atiça o desejo de ganhar o prêmio.

Não cabe aqui discutir o mérito do programa, mas sim analisar o que o senso comum aponta como solução imediata da questão: o que fazer com 1 milhão de reais?

Partindo do pressuposto de que você necessitasse de um tempo maior para decidir o que iria adquirir com essa importância, então, enquanto pensa no que fazer aplicaria imediatamente essa quantia na rede bancária para o capital não ficar se desvalorizando.

Se investisse toda essa importância a juros pós–fixados num prazo determinado, verificando que já possuía ao final desse período o montante de R$1,1 milhão (no caso de um prêmio de, por exemplo, R$1 000 000), estaria então auferindo um rendimento bruto de 10%. Diante dessa realidade, a pessoa teria a intenção de sacar apenas os juros reais auferidos, reaplicando o saldo que obviamente teria o mesmo poder de compra da época da primeira aplicação.

Se a taxa de inflação do período fosse de 4%, então a taxa de 10% obtida seria aparente, ou seja, ilusória, uma vez que teria que descontar a inflação. À primeira vista parece então que o rendimento líquido seria de 6%. Essa taxa significa que para cada R$100,00 aplicados, R$6,00 seria o ganho real. Acontece, porém, que o correto seria de cada R$104,00 se auferiria R$6,00 de juros reais, porque R$4,00 seria somente a atualização do capital pelo índice inflacionário.

Dessa maneira fica bem claro que a taxa real de uma aplicação financeira é sempre menor que a diferença entre a taxa de rendimento bruto e a taxa de inflação.

Atividades de aprendizagem

1. Qual a taxa anual equivalente a 2% ao trimestre?

R= 8,24

2. Qual a taxa semestral equivalente a 5,6 % ao mês?

R= 38,67

3. Qual o montante de um principal de R$72.000,00, no fim de 1 ano, com juros de 8% a.a./a.t?

R= R$77.935,12

4. Determinar:

a) Taxa para 183 dias equivalentes a 65% a.a.

R= 28,99

b) Taxa anual equivalente a 2% a.m.

R= 26,82

c) Taxa para 27 dias, equivalente a 13% ao trimestre.

R= 3,90

d) Taxa anual equivalente a 1% ao quadrimestre.

R= 3,03

e) Taxa trimestral equivalente a 47,746% em dois anos.

R= 5,97

5. Dada a taxa de 3,96% em 37 dias, calcule a taxa equivalente em juros compostos para 93 dias.

R= 10,27

6. Dada a taxa de 10,27% em 93 dias, calcule a taxa equivalente em juros compostos para 37 dias.

R= 3,96

Resumo

Vimos o conceito de taxa real e a sua importância no cenário financeiro.

Anotações

Aula 16 – Operações de fluxo de caixa

Veremos nesta aula um tema de grande importância nas finanças: o valor presente e o valor futuro nas operações de fluxo de caixa.

16.1 Diagrama de fluxo de caixa

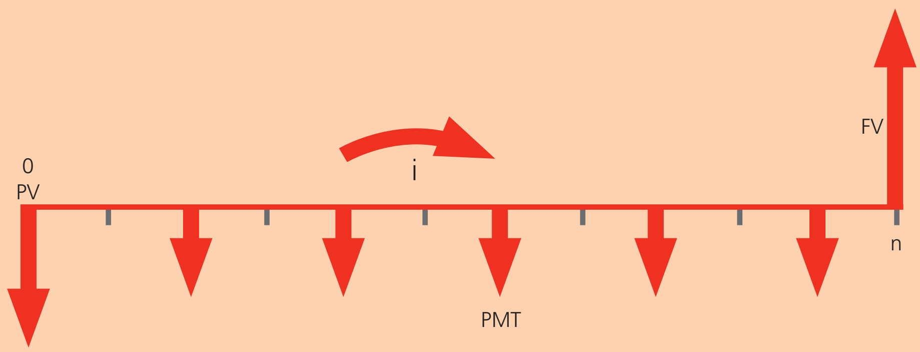


Figura 16.1: Elementos principais do diagrama
Fonte: Elaborado pelo autor

Legenda:
Escala Horizontal – expressa unidade temporal, podendo ser: dias, semanas, meses, anos etc.;
Setas para cima – consistem em entrada ou recebimento de dinheiro;
Setas para baixo – consistem em saídas ou pagamentos.
PV – *Present Value* (Valor Presente).Simboliza o valor do capital no momento presente, chamado de valor atual, capital ou principal.
PMT – *Payment* (Pagamento) ou ainda *Periodic Payment Amount* (valor do pagamento periódico).É o valor de uma parcela que pode ser adicionada ou subtraída do montante a cada período.
FV – *Future Value* (Valor Futuro).Simboliza o montante, o valor do capital após certo período de tempo, também chamado de valor futuro. É a soma do Capital com os juros.

16.2 Valor presente

Na fórmula $M = C. (1 + i)^n$, o capital inicial **C** é também conhecido como Valor Presente (PV = *present value*) e o montante **M** é também conhecido como Valor Futuro (FV = *future value*).**i** é o índice de interesse (do inglês *interest rate*) –representa a **taxa de juros**.

Então essa fórmula pode ser escrita como

$FV = PV\ (1 + i)^n$

Se isolarmos **PV** na fórmula temos:

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}$$

Observação:

Veremos que a maioria dos cálculos com as fórmulas apresentadas podem ser realizados com o auxílio de calculadoras financeiras. É o caso da HP-12C, calculadora lançada pela empresa de informática e tecnologia estadunidense Hewlett-Packard em 1981. O valor presente é representado, por exemplo, pela tecla PV (*present value*), sendo assim as siglas apareceram sempre com iniciais da língua inglesa. Com esta mesma fórmula podemos calcular o valor futuro a partir do valor presente. Tendo em vista que a linguagem de cálculo e entrada de valores nas calculadoras HP é diferente das calculadoras convencionais, deixaremos de lado o uso desse tipo de calculadora, apenas sugerimos alguns *links* com o manual do usuário e emuladores para utilizar a calculadora em seu computador ou *online*.

1. Neste *link*, você encontra o emulador da calculadora HP-12C disponível gratuitamente para teste na internet: http://www.epx.com.br/ctb/hp12c.php
2. Caso possua a versão mais atual do Windows em seu computador, poderá também fazer o download da HP-12C para a sua área de trabalho, desse modo não precisará de conexão com a internet para acessá-la. Em http://h10032.www1.hp.com/ctg/Manual/bpia5314.pdf está disponível o manual do usuário e de solução de problemas frequentes na HP-12C.

Exemplo:

1. Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos R$1.500,00 a 2% ao mês?

Solução:

$FV = 1.500.\ (1 + 0{,}02)^{12} = R\$1.902{,}36$

2. Quanto teremos daqui a 12 meses se aplicarmos $1.000,00 a 2,5% ao mês?

Solução:

$FV = 1000.\ (1 + 0{,}025)^{12} = R\$1.344{,}89$

16.3 Séries de pagamentos

Este estudo busca um entendimento das operações financeiras que envolvem pagamentos ou recebimentos parcelados. As séries podem assim ser classificadas:

- Quanto ao prazo:

  Temporárias – duração limitada

  Perpétuas – duração ilimitada

- Quanto ao valor:

  Constantes – parcelas iguais

  Variáveis – parcelas diferentes

- Quanto à forma:

  Imediatas – quando ocorre no primeiro período, podendo ser antecipada (início do período) ou postecipada (final do período)

  Diferidas – operações com carência, podendo ser antecipadas ou postecipadas.

- Quanto ao período:

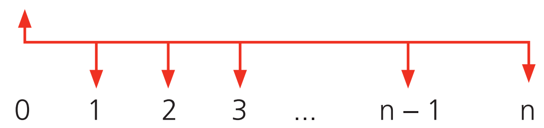
  Periódicas – os intervalos entre as prestações são iguais.

  Não periódicas – os intervalos são diferentes.

16.3.1 Operações postecipadas

Caracterizam-se as operações postecipadas como sendo aquelas em que o vencimento da 1ª prestação é no final do período. Um termo de mercado, por exemplo, para esta operação é: "a primeira só em 30 dias".

Início dos pagamentos



A ilustração acima mostra a compra de um bem no instante zero e suas prestações vencendo ao final do 1º período.

Aqui estão as fórmulas para realizarmos operações postecipadas:

$$PV = \frac{PMT\,[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}$$

$$PMT = \frac{PV \,.\, i}{1 - (1 + i)^{-n}}$$

Exemplos:

1. Qual o valor das prestações que serão pagas mensalmente, se uma TV que custa R$690,00 à vista, fosse vendida em 10 vezes, a taxa de juros de 5%a/m?

$$PMT = \frac{690 \,.\, 0{,}05}{1 - (1 + 0{,}05)^{-10}}$$

$$PMT = \frac{34{,}50}{0{,}3861}$$

$$PMT = 89{,}36$$

2. Quanto custou à vista uma mercadoria que foi comprada em oito vezes, a taxa de 3,7%a.m e prestações mensais, consecutivas e postecipadas de R$733,47?

$$PV = \frac{733{,}47\,[1 - (1 + 0{,}037)^{-8}]}{0{,}037}$$

$$PV = \frac{733{,}47 \,.\, 0{,}25223}{0{,}037}$$

$$PV = \frac{185}{0{,}037}$$

$$PV = 5.000$$

Resumo

Foi exposto nesta aula um tema de grande importância nas finanças: o valor presente e o valor futuro nas operações de fluxo de caixa. Sendo que o valor presente é o valor do principal da aplicação ou resgate financeiro, e o valor futuro é o valor do principal que depois de determinado tempo acrescido de juros geram o montante da aplicação.

Anotações

Aula 17 – Outras séries de pagamento

O foco desta aula é trabalhar outros tipos de séries de pagamento: antecipadas e postecipadas com carência.

Você já deve ter percebido que quando vamos a uma loja e pedimos para o vendedor fazer o cálculo de quanto custa um determinado produto, parcelado, em um período de tempo, ele recebe do gerente de vendas uma tabela que contém todos os coeficientes para efetuar os cálculos de prestações, conforme o pedido dos clientes. Para calcularmos estes coeficientes, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$\text{Fator postecipado} = \frac{i}{[1-(1+i)^{-n}]}$$

Exemplo:
Com relação à questão da TV que custa R$690,00, o cliente quer o parcelamento em 10 vezes a taxa de juros utilizada é 5%a/m.

$$\text{fator} = \frac{0{,}05}{[1-(1+0{,}05)^{-10}]}$$

$$\text{fator} = 0{,}129504$$

$$\text{prestação} = 690 \;.\; 0{,}129504$$

$$\text{prestação} = 89{,}36$$

Atividade de aprendizagem

Elaborar uma tabela para parcelamento, parcelas consecutivas e postecipadas, até 6 vezes, com uma taxa de 3,5% a.m. Depois aplicar em uma geladeira que custa R$890,00.

17.1 Operações antecipadas

São operações onde os pagamentos começam no início do 1° período, ou seja, no ato.

No mercado é comum ver a seguinte situação: "entrada mais 'n' parcelas" ou "30% de entrada e o saldo em 30/60 e 90 dias".

Para efetuarmos estas operações, vamos precisar das seguintes fórmulas:

$$PV = \frac{PMT\,[1 - (1 + i)^{-n}](1 + i)}{i}$$

$$PMT = \frac{PVi}{[1 - (1 + i)^{-n}]\,(1 + i)}$$

Exemplo:
Calcule o valor das prestações pagas na compra de um bem que custa R$690,00 à vista, e que foi vendido em 1 + 9 vezes com juros de 5%a.m.

$$PMT = \frac{690\ .\ 0{,}05}{[1 - (1 + 0{,}05)^{-10}]\,(1 + 0{,}05)}$$

$$PMT = \frac{34{,}50}{0{,}4054}$$

$$PMT = 85{,}10$$

17.2 Operações com carência postecipada

As operações com carência possuem a característica de o vencimento da primeira parcela ocorrer em um período superior ao primeiro período subsequente ao da compra. Caso o pagamento seja feito no início deste período superior, a carência então passa a ser chamada de postecipada. O valor presente pode ser calculado através da seguinte fórmula:

$$PV = \frac{PMT\,\dfrac{[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}}{(1 + i)^{n}}$$

N significa o período de carência.

Exemplo:
Quanto custa à vista um televisor que foi comprado em cinco prestações mensais de R$499,90, sem entrada, com a primeira paga três meses após a data da compra, e se a loja cobrar 3,98% ao mês de taxa de juro?

$$PV = \frac{499{,}90\ \dfrac{[1-(1+0{,}0398)^{-5}]}{0{,}0398}}{(1+0{,}0398)^{3}}$$

$$PV = \frac{\dfrac{499{,}90\ .\ 0{,}1773}{0{,}0398}}{1{,}1242}$$

$$PV = \frac{499{,}90\ .\ 0{,}1773}{0{,}0398}\ .\ \frac{1}{1{,}1242}$$

$$PV = \frac{92{,}1598}{0{,}0398}\ .\ \frac{1}{1{,}1242} \qquad PV = \frac{92{,}1598}{0{,}0447}$$

$$PV = 2.059{,}72$$

O preço à vista da mercadoria é de R$2.059,72.

Resumo

Vimos conceitos das séries de pagamento antecipadas e com carência postecipada.

Anotações

Aula 18 – Descontos

O objetivo da aula é trazer à tona a questão dos descontos simples nas operações financeiras: o desconto comercial e o desconto racional.

18.1 Descontos

Quando uma pessoa contrai uma dívida é muito comum o credor emitir um documento que serve como comprovante desta operação financeira, chamado de título. Comum também as empresas, que possuem o direito de receber os valores contidos nestes títulos, utilizarem um produto bancário chamado desconto. Este produto visa antecipar o valor a ser recebido em uma data futura, buscando assim atender eventuais necessidades de caixa. Exemplos de títulos: nota promissória; duplicata; letras de câmbio e cheques.

Existem dois tipos básicos de descontos simples nas operações financeiras: **o desconto comercial e o desconto racional**.

18.1.1 Desconto comercial ou por fora

Esta modalidade de desconto é amplamente utilizada no mercado, principalmente em operações bancárias e comerciais de curto prazo. A taxa de desconto neste sistema incide sobre o montante ou valor nominal do título; em consequência disto gera-se um valor maior e mais justo de desconto do que no sistema racional. Este desconto equivale aos juros simples, onde o capital corresponde ao valor nominal do título. Assim temos:

N = valor nominal

V = valor atual

Dc = desconto comercial

d = taxa de descontos simples

n = número de períodos

No desconto comercial, a taxa de desconto incide sobre o valor nominal **N** do título. Logo:

$$Dc = N.\ i.\ n$$

Valor atual

$$V = N - Dc$$

Sabendo que Dc = N.i.n então:

$$V = N.\ (1 - i.\ n)$$

Rir é o melhor remédio

Figura 17.1 - Rir
Fonte: http://www.blogbrasil.com.br

Isaac x Deus

Depois de muito sacrifício Isaac conseguiu uma audiência com Deus.

- Deus quanto vale 1.000.000 reais para o senhor?
- Um centavo Isaac, um mero centavo!
- Deus quanto vale um século para o senhor?
- Um segundo Isaac, um mero segundo!

Então Isaac rapidamente fez outra pergunta.

- Senhor Deus me dá um centavo?
- Espere só um segundo Isaac.

Exemplo:

Considere um título cujo valor nominal seja R$10.000,00. Calcule o desconto comercial a ser concedido para um resgate do título 3 meses antes da data de vencimento, a uma taxa de desconto de 5% a.m.

Solução:

$V = 10000. (1 - 0,05.3) = 8.500$

$Dc = 10000 – 8.500 = 1.500$

Valor descontado = R$8.500,00

Desconto = R$1.500,00

Resumo

Nesta aula foram resgatadas as definições do desconto simples nas operações financeiras: o desconto comercial.

Anotações

Aula 19 – Desconto racional ou por dentro e desconto composto

Nesta aula vamos conhecer um pouco mais sobre descontos utilizados nas aplicações financeiras, em especial, o desconto racional e o composto.

19.1 Desconto Racional

O desconto racional equivale aos juros simples, calculado sobre o valor atual do título. Ou seja, é aquele em que a taxa de desconto incide sobre o valor líquido do título.

Assim temos:

Dr = desconto racional

$$D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n}$$

Sendo o valor atual a diferença entre o valor nominal e o desconto, temos:

Valor atual

$$V = N - D_r$$

Sabendo que Dr = (N. i . n) / (1 + i . n), então:

$$V = \frac{N}{1+i.n}$$

Exemplo:

Um título de R$6.000,00 a ser descontado à taxa de 2,1% a.m. faltando 45 dias para o vencimento do título, determine o desconto racional e o valor atual racional

Solução:

$N = 6000,00$

$n = 45$ dias

$i = 2,1\%$ a.m. $= 0,021$ a.m. $= 0,0007$ a.d.

$$D_r = \frac{N.i.n}{1+i.n} = \frac{6000.0,0007.45}{1+0,0007.45} = \frac{189}{1,0315} = 183,22$$

$V = N - D_r$

$V = 6000 - 183,22$

$V = R\$5.186,78$

19.2 Desconto Composto

A definição de desconto composto é a mesma que do sistema de capitalização simples. O que diferencia um do outro é justamente o sistema de capitalização, que neste caso é composto.

A fórmula geral de desconto é: $D = N – Va$

A fórmula de desconto composto é: $VA = \boxed{\dfrac{N}{(1+i)^n}}$

Exemplos:

1. Calcular o desconto composto de um título de R$3.600,00, a taxa de 4,5% a.m. e antecipado em 2 meses.

$Va = 3600/(1 + 0,045)^2$

$Va = 3600/1,092 = 3.296,70$

Utilizando a fórmula geral de desconto:

$D = N – Va$, temos: $D = 3600 – 3296,70 = 303,30$

2. Um título de R$10.000,00 será negociado em 3 meses antes do seu vencimento, a taxa de 8% a.m. Determine o valor presente.

$Va = 10000/(1 + 0{,}08)^3$

$Va = 10000/1{,}26 = 7.936{,}50$

Atividades de aprendizagem

1. De quanto será o desconto que um título de R$8.000,00, a taxa de 8% a.m., sofre ao ser resgatado em dois meses antes do seu vencimento?

Solução:

Resposta: R$1.141,29

2. Uma duplicata, no valor de R$120.000,00 e com vencimento em 4 anos, por quanto será paga hoje se sofrer um desconto composto de 14% a.a?

Solução

Resposta: 71.049,59

3. Qual foi o desconto composto obtido para saldar uma dívida de R$80.000,00 dois meses antes do vencimento e a taxa de 12% a.m?

Solução:

Resposta: R$16.224,49

4. Uma letra de câmbio foi paga 4 meses antes do seu vencimento, com um desconto composto de 9% a.m, tendo se reduzido para R$75.600,00. Qual era o seu valor de face?

Solução:

Resposta: 106.779,66

5. Qual o desconto composto obtido no resgate de um título de R$85.000,00, 5 meses antes do vencimento, a taxa de 8% a.m?

Solução:

Resposta: 27.200,00

6. Qual o montante de R$152.000,00, a taxa de juros compostos de 7% a.m, durante 3 meses e 12 dias?

Solução:

Resposta: R$191.314,73

7. A quantia de R$60.000,00 foi aplicada a juros compostos. Determine o montante depois um quarto de ano a 10% a.m.

Solução:

Resposta: R$79.860,00

8. Determine o capital que aplicado a juros compostos de 6% a.m, durante 3 meses resultou em um montante de R$5.730,48.

Solução:

Resposta: R$4.800,00

9. Uma aplicação no valor de R$780,00, durante 35 dias a uma taxa de juros compostos de 23% a.a, rende quanto?

Resposta: R$780,00

10. Foi descontado um título no valor de R$6.800,00, quando faltavam 63 dias para seu vencimento, a uma taxa de desconto composto de 3% a.m. Calcular o valor do desconto. (Resposta: R$409,26)

Solução

Resposta = R$409,26

11. Calcular o desconto de um título no valor de R$60.800,00, descontado a uma taxa de 42,58% a.a, quando faltavam 128 dias para o seu vencimento.

Solução

Resposta: R$7.204,64

12. Um título no valor de R$6.800,00 foi resgatado 58 dias antes do vencimento, pelo valor de R$6.422,30. Calcular a taxa de desconto mensal.

Solução

Resposta: 0,30% a.m.

Resumo

Nesta aula conhecemos um pouco mais dos descontos utilizados nas aplicações financeiras, em especial o Desconto Racional e o Composto.

Anotações

Aula 20 – A calculadora HP-12C I

No decorrer desta aula vamos aprender a manusear na mais famosa calculadora financeira de todos os tempos: a HP-12C

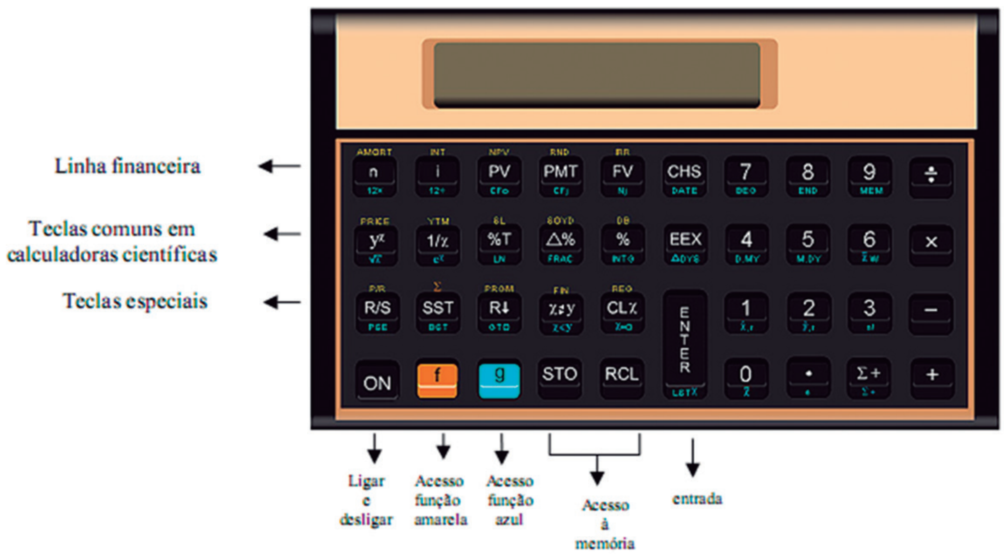


Figura 20.1: Calculadora HP
Fonte: http://portaleng.net

Diferentemente das calculadoras convencionais, que utilizam o método algébrico convencional, as HPs financeiras utilizam o método Notação Polonesa Inversa, (RPN na sigla em inglês, de *Reverse Polish Notation*), que permite uma linha de raciocínio mais direta durante a formulação e melhor utilização da memória.

Neste *link* você encontra o emulador da calculadora HP-12C disponível gratuitamente para teste na internet: http://www.epx.com.br/ctb/hp12c.php

20.1 Algumas noções básicas de operação RPN

20.1.1 Ligando e desligando a calculadora:

Para começar a usar a sua HP-12C, pressione a tecla ON. Se você pressionar novamente, a calculadora será desligada. Note que a última entrada digitada ou cálculo efetuado permanece no visor até que a memória seja apagada através da tecla CLX.

20.1.2 O Teclado

Procure o sinal de " = " na HP. Achou?

Impossível!

A HP-12C não "pensa" como as demais calculadoras.

A HP-12C realiza duas ou até mesmo três funções em cada tecla:

Como forma de economizar teclas, a HP emprega o recurso de atribuir à mesma tecla, diferentes funções. Algumas teclas da HP apresentam legendas em branco (função principal), em amarelo ou em azul. Para empregar uma função "amarela" é necessário pressionar a tecla [f] antes. Para empregar uma função "azul" é necessário pressionar a tecla [g] antes.

Exemplo: a tecla [i] apresenta outras duas funções adicionais: a função [INT] em amarelo e a função [12÷].

Para usar a função [i] basta pressionar a tecla [i]. Para usar a função [INT] é necessário pressionar, antes, a tecla [f] (note que o visor indicará que tecla [f] foi pressionada) e depois a tecla [INT]. De forma similar, para usar a função [12÷] é necessário pressionar a tecla [g] (note que o visor indicará que tecla [g] foi pressionada) e depois a tecla [12÷].

Observações complementares:

Lembre-se que quando a tecla [f] ou [g] é pressionada, somente as funções em amarelo ou azul serão ativadas.

Caso as teclas [f] ou [g] tenham sido pressionadas de forma indesejada, para cancelar a operação, basta pressionar as teclas [f] [PREFIX] tecla compartilhada pelo botão ENTER.

20.1.3 Separando dígitos

Se, ao ligar sua HP, você perceber que a parte inteira está separada da parte decimal por ponto (0.00), significa que está preparada para cálculo em US$ (dólares). Para adaptá-la a cálculos em R$ (nosso sistema de separação de inteiros e decimais), ou seja, (0,00), basta, com a máquina desligada, pressionar ao mesmo tempo as teclas ON e "." soltando primeiro a tecla ON e, em seguida, a tecla ".".

20.1.4 Testando as funções e funcionamento da sua HP-12C

A calculadora pode não estar funcionando normalmente apesar de responder ao acionamento das teclas. Um teste rápido é o seguinte:

- Desligue a calculadora.

- Pressione e mantenha pressionada a tecla (ON) e ao mesmo tempo pressione e mantenha pressionada a tecla de multiplicação (x).

- Solte a tecla (ON).

- Solte a tecla de multiplicação (x).

Se a máquina estiver OK, após 25 segundos, durante os quais a palavra RUNNING ficará piscando no visor, este deverá apresentar:

-8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,

Além disso, os seguintes indicadores de estado aparecerão no visor:

USER f g BEGIN GRAD D.MY C PRGM

Se o visor apresentar a mensagem ERROR 9 ou apagar-se, significa que a máquina está com defeito.

20.1.5 Cálculos Aritméticos Simples

Para realizar os cálculos, os números devem ser informados na ordem. Basta lembrar que nas calculadoras simples a ordem em que se digitam as operações ocorre na íntegra, ou seja, se digitar a adição em primeiro lugar, esta será resolvida primeiro em relação a uma multiplicação, por exemplo. A HP-12C armazena os valores digitados a cada instante que se pressiona ENTER.

Por utilizar a notação RPN, a HP-12C exige um algoritmo (sequência de passos) de cálculo diferenciado para a sua utilização. Por exemplo, para que se possa somar dois valores é preciso realizar a seguinte operação:

* primeiro valor
* Tecla [ENTER]
* segundo valor
* Tecla [+]

15+27=42

Pressione	visor
15 Enter	15,00
27 +	42,00

Resumo

Nesta aula apresentamos os conceitos e regras iniciais para o correto manuseio da calculadora financeira HP-12C

Anotações

Aula 21 – A calculadora HP-12C II

Nesta aula daremos prosseguimento ao aprendizado do funcionamento da calculadora financeira HP-12-C.

21.1 Cálculos financeiros básicos

Para a realização de cálculos financeiros básicos com a HP-12C (cálculos de juros simples ou compostos) é preciso estar ciente das seguintes teclas:

n → Indica o prazo que deve ser considerado. Pode ser dado em dias, meses, trimestres, anos, desde que de acordo com a taxa de juros.

i → Significa *interest rate* (juros, em inglês). Indica a taxa de juros usada no trabalho com o capital. Deve estar de acordo com o indicador de tempo.

PV → Significa *Present Value* (valor presente, em inglês). É o capital inicial sobre o qual os juros, prazos e amortizações serão aplicados.

FV → Significa *Future Value* (valor futuro, em inglês). É o montante final resultante da soma dos juros acumulados com o capital inicial, descontados os pagamentos, caso existam.

PMT → Significa *Periodic Payment Amount* (valor do pagamento periódico, em inglês). É o valor de uma parcela que pode ser adicionada ou subtraída do montante a cada período.

Para realizar cálculos nessa modalidade é necessário dar pelo menos três informações iniciais e obteremos outra como resposta. É importante ter em mente que [PV] e [FV] terão sempre valores com sinais opostos, pois se um representar uma saída de caixa, o outro será uma entrada de caixa. Caso o cálculo exija que sejam inseridos [PV] e [FV] simultaneamente para a obtenção de [i], [n] ou [PMT], deve ser pressionado [CHS] (*chang signal*) antes da inserção de um dos dois.

Exemplo:

Tem-se R$1.500,00 aplicados na poupança e colocando R$100,00 todos os meses durante 10 anos (120 meses), quanto vou ter no final? (taxa anual de poupança: 6% a.a., que convertido utilizando-se a taxa de equivalência, pois se trata de juros compostos. A taxa ao mês, fica em 0,4867% a.m.) Deve-se digitar os valores e apertar os botões indicados:

1500 tecle CHS, depois pressione PV

100 tecle CHS, em seguida pressione PMT

0.4867 tecle " i "

120 tecle "n"

Por fim, pressione FV

O resultado será de R$18.932,86.

Antes de todos os novos cálculos pressione [f] seguido de CLX (acessamos assim a função "reg") para limpar a memória.

21.2 Funções de Porcentagem

Para calcular o valor correspondente à porcentagem de um número, introduza a base, pressione ENTER, introduza a porcentagem e pressione a tecla %.

Exemplo:

14% de 300

300 ENTER 14% → 42,00

Para calcular a variação percentual entre dois números, introduza como base, o valor mais antigo da operação, seguido da tecla ENTER, introduza o segundo número e pressione Δ%

Exemplo:

Em um pregão, as ações da XY S.A. subiram de R$5,37 para R$5,90. Qual foi a variação percentual?

5,37 ENTER 5,90 então tecle Δ% = 9,87%

Para calcular a porcentagem de um valor em relação a um total, introduza o valor correspondente ao total, digite o valor da porcentagem e pressione % T.

Exemplo:

No mês passado, as despesas de uma indústria foram assim distribuídas:

- salários e encargos: R$35.000,00

- conservação e manutenção: R$5.000,00

- utilidades (luz, água, telefone etc.): R$7.000,00

- gerais e diversas: R$3.000,00

Total das despesas: R$50.000,00

Qual é o percentual que os salários e encargos representam do total das despesas da fábrica?

50.000,00
ENTER
35.000,00
% T
Visor: 70 %

Resumo

Vimos nesta aula todos os procedimentos financeiros básicos para a operação da calculadora financeira HP-12C

Aula 22 – A calculadora HP-12C III

Nesta aula daremos prosseguimento ao aprendizado do funcionamento da calculadora financeira HP-12C. Contudo, iremos passar do nível básico para o intermediário, dando ênfase às operações financeiras propriamente ditas.

22.1 Cálculo de juros simples

Qual o valor dos juros correspondentes a uma aplicação de R$420,00, à taxa de 1,5% a.m., por um prazo de 3 meses?

J = C . i . n (ou use → J = C . i. t)

J = 420,00 . 0,015 . 3

J = R$18,90

Obs.: Na fórmula utilizamos a taxa (i) na forma decimal.

Na HP:
420 pressione a tecla ENTER
0,015 tecle "x"
3 tecle "x"
Visor: 18,90

22.2 Cálculo do capital inicial

Qual o capital que, à taxa de 1,5% ao mês, rende juros simples de R$18,90 em 3 meses?

J = C. i. n
Então: C = J / i . n

Logo:

C = 18,90/0,015 . 3
C = R$420,00

Na HP:

18,90 ENTER
0,015 ENTER
3 x
÷

Visor: 420,00

22.3 Cálculo do montante

A empresa XY Ltda. solicita um empréstimo no valor de R$12.500,00, pelo prazo de 33 dias, a uma taxa de 89,5976% ao ano. Qual o valor a ser pago?

Pela fórmula algébrica:

$FV = PV. (1 + i)^n$
$FV = 12.500.(1 + 0{,}895976)^{33/360}$
FV = 13.526,64

Utilizando a HP:

[f] 4 Fixar quatro casas decimais.

[f] [REG] Apagar registros anteriores.

[STO] [EEX] Aparecerá um c no visor. **(JC fracionáveis)**

[33] visor 33,000

[360] visor 360,0000

[÷] visor 0,0917

[89.5976] [i] visor 89,5976

[12500] [CHS] [PV] visor 12,500.0000

[FV] visor running (piscando)

visor 13.526,6393

[f] 2 visor 13.526,64

22.4 Cálculo da taxa

Um capital inicial de R$430,00 rendeu R$80,00 de juros após permanecer aplicado por quatro meses. Qual foi a taxa de juros mensal da aplicação?

[f] 4 Fixar quatro casas decimais.

[f] [REG] Apagar registros anteriores.

[STO] [EEX] Aparecerá um c no visor. **(JC fracionáveis)**

[4] [n] visor 4,0000

[510] [FV] visor 510,0000

[430] [CHS] [PV] visor - 430,0000

[i] visor running (piscando)

visor 4,3579 (valor da taxa ao mês)

Resumo

Nesta aula abordamos o nível intermediário da calculadora financeira HP-12C

Aula 23 – A calculadora Financeira HP-12C IV

Nesta aula, iremos aprender o cálculo em nível avançado da calculadora financeira HP-12C.

23.1 Cálculo do período

Um montante de R$630,00 foi obtido após aplicação de R$570,00 a uma taxa de juros compostos igual a 3% a.m. Qual foi a duração da operação?

[f] 4 Fixar quatro casas decimais.

[f] [REG] Apagar registros anteriores.

[STO] [EEX] Aparecerá um ***c*** no visor. **(JC fracionáveis)**

[630] [FV] visor 630,0000

[3] [i] visor 3,0000

[570] [CHS] [PV] visor -570,0000

[n] visor running (piscando)

visor 4,0000 (período de tempo = meses)

23.2 Cálculo de desconto composto

Uma nota promissória de R$85.000,00 foi descontada em um Banco faltando 5 meses para seu vencimento, a uma taxa bancária de 8% a.m. Determine o valor do desconto composto.

[f] 4 Fixar quatro casas decimais.

[f] [REG] Apagar registros anteriores.

[STO] [EEX] Aparecerá um ***c*** no visor. **(JC fracionáveis)**

[5] [n]visor 5,0000

[8] [i]visor 38,0000

[85000] [CHS] [FV]visor -85.000,0000

[PV] visor running (piscando)

visor 57.849,5717(PV) para achar o desconto é só subtrair 85.000 do PV

[85000] [-] visor -27.150,4283

[CHS] visor 27.150,4283

[f] 2 visor 27.150,43

23.3 Cálculo de taxas equivalentes

Qual a taxa anual equivalente a 2% ao trimestre?

[f] 4 Fixar quatro casas decimais.

[f] [REG] Apagar registros anteriores.

[STO] [EEX] Aparecerá um ***c*** no visor. **(JC fracionáveis)**

100 [CHS] PV visor 100,0000

2 [i] visor 2,0000

4 [n] visor 4,0000

[FV] visor running (piscando)

visor 108,2432 para achar a taxa é só subtrair o PV

[100] [-] visor 8,2432

[f] 2 visor 8,64

Resumo

Nesta aula, aprendemos em detalhes as principais operações financeiras sendo calculadas através da HP-12C: desconto composto, assim como taxas equivalentes.

Anotações

Aula 24 – Amortizações

No decorrer desta aula vamos definir e nos aprofundar nas técnicas de amortização, utilizando três tipos de tabelas: a SAC (Sistema de Amortização Constante), a SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e a PRICE ou Sistema Francês (tabelas de juro composto pelo autor Richard Price).

24.1 O que é amortização?

É o pagamento de uma dívida ou de uma prestação de capital com vencimento futuro, antes do prazo estabelecido inicialmente. Muitas vezes os acordos de crédito com as entidades financeiras preveem a possibilidade de amortizações antecipadas, embora, geralmente são cobradas taxas penalizadoras como forma de compensar parte dos juros que deixarão de ser recebidos.

Amortizar que dizer abater, quitar parceladamente uma dívida, normalmente em partes, mas também pode ser de uma única vez, ou seja, amortizar é pagamento de uma dívida de modo antecipado.

Uma parcela de financiamento é composta por duas partes, amortização mais juros. A parte que corresponde à amortização é deduzida do saldo devedor, fazendo com que a dívida seja diminuída a cada período. Existem dois sistemas de amortização mais usados no sistema bancário e comercial: o PRICE ou FRANCÊS e o SAC. No caso específico da Caixa Econômica Federal é utilizado o Sistema SACRE (Sistema de Amortização Crescente).

Segundo a NBC T 19.5, é obrigatório o reconhecimento da depreciação, amortização e exaustão. Veja na integra a lei que versa sobre as Normas Brasileiras de Contabilidade: Depreciação, Amortização e Exaustão.

Fonte: http://www.portaldecontabilidade.com.br/nbc/nbct19_5.htm

Depreciação é a redução do valor dos bens pelo desgaste ou perda de utilidade por uso, ação da natureza ou obsolescência.

A depreciação de um ativo começa quando o item está em condições de operar na forma pretendida pela administração, e cessa quando o ativo é baixado ou transferido do imobilizado.

A amortização consiste na recuperação contábil:

1. do capital aplicado na aquisição de bens e direitos classificados no ativo imobilizado, cuja existência ou exercício tenha duração limitada, ou cuja utilização pelo contribuinte tenha o prazo limitado por lei ou contrato; e

2. dos custos, encargos ou despesas, registrados no ativo diferido, que contribuirão para a formação do resultado de mais de um período de apuração.

   A principal distinção entre esses dois encargos é que, enquanto a depreciação incide sobre os bens físicos de propriedade do próprio contribuinte, a amortização relaciona-se com a diminuição de valor dos direitos (ou despesas diferidas) com prazo limitado (legal ou contratualmente).

24.2 Sistemas de Amortização (pagamento) do seu financiamento imobiliário

Figura 24.1: Imóvel
Fonte: http//:www.tropicimoveis.com.br

Existem diversos mecanismos de amortização de dívidas reconhecidas internacionalmente e disponíveis nos manuais de Matemática Financeira. No Brasil, para atuar no sistema financeiro imobiliário (SFI) os bancos operam com o sistema de amortização constante (SAC), a Tabela Price (TP) e o sistema de amortização crescente (SACRE), trata-se de formas distintas de cálculo das prestações do seu financiamento imobiliário. Você precisa saber que em todos os sistemas de amortização uma parcela da prestação que você paga é destinada ao pagamento de juros, e outra parcela é destinada à amortização (pagamento) da dívida. Além disto, ainda podem constar na prestação uma parcela do seguro de morte e invalidez permanente (MIP) e outra parcela do seguro para danos físicos do imóvel (DFI).

Os juros no sistema financeiro imobiliário estão atualmente na faixa de TR (Taxa de Referência) +6% ao ano, TR + 8,16% ao ano e TR + 10,5% ao ano para família com renda de 1 salário mínimo até R$4.900,00 através da Carta de Crédito FGTS e TR+12% ao ano TJLP + 5,5% ao ano ou INCC + 1% ao mês para famílias com renda superior a R$4.900,00 em outras modalidades com Recursos da Poupança, do Fundo de Amparo ao Trabalhador - FAT, ou outras fontes de Recursos (*Funding*) de Construtoras e Incorporadoras. A principal diferença entre o valor das prestações está na parcela da dívida que está sendo amortizada, e é esta a diferença entre estas três metodologias.

24.2.1 Sistemas de Amortização Constante (SAC)

No sistema de amortização constante (SAC) a parcela de amortização da dívida é calculada tomando por base o total da dívida (saldo devedor) dividido pelo prazo do financiamento, como um percentual fixo da dívida, desta forma é considerado um sistema linear. No SAC, a prestação inicial é um pouco maior que na Tabela Price, pois o valor que é pago da dívida (amortização) é maior, assim, você estará liquidando mais da dívida desde o início do financiamento e pagando menos juros ao longo de contrato.

À medida que a dívida começa a ser amortizada, a parcela dos juros e consequentemente a prestação como um todo tendem a decrescer, uma vez que o próprio saldo devedor se reduz. Com isso, no SAC, o saldo devedor e a sua prestação tendem a decrescer de forma constante desde o início do financiamento e não deixa resíduo desta forma, você estará menos exposto em caso de aumento do indexador do contrato (a TR, TJLP ou INCC) durante o financiamento.

24.2.2 Sistema de Amortização Crescente (SACRE)

A diferença do SAC (Sistema de amortização constante) para o SACRE (Sistema de Amortização Crescente) é apenas o recálculo, ou seja, um novo cálculo após um determinado período de andamento do contrato. O SACRE é baseado na mesma metodologia do SAC, mas, sempre considerando o prazo remanescente (que falta) para pagar. Assim o recálculo força o crescimento da amortização e a rapidez do pagamento.

Ao contrário do que acontece no SAC a parcela de amortização não é constante e sim crescente, o que permite que a dívida seja paga mais rapidamente. O primeiro recálculo acontece com 12 (doze) meses e poderá tornar-se trimestral na hipótese da prestação não estar amortizando (pagando/ quitando) a dívida.

No SACRE, a partir de um determinado período, durante o prazo de financiamento, a prestação tende a cair continuamente até o final do financiamento. Exatamente por isto, o percentual de comprometimento da renda neste tipo de mecanismo de amortização tende a ser mais alto, em cerca de 30%, pois no decorrer do prazo do financiamento as prestações devem cair, e com isto diminuirá o grau de comprometimento da renda. Atualmente o SACRE é adotado pela Caixa Econômica Federal nas suas linhas que usam recursos do FGTS, como a Carta de Crédito FGTS Individual.

24.2.3 A Tabela Price (TP) ou Sistema Francês de Amortização (SFA)

Ao contrário do sistema SAC onde a amortização é igual, na Tabela Price todas as prestações são iguais. Este sistema seria ideal se não existisse no financiamento imobiliário a figura do indexador da prestação (índices: TR, TJLP, INCC, CUB, IGPM, etc.).

Para um financiamento de igual valor, a prestação da Tabela Price é sempre menor que a prestação no sistema SAC ou SACRE. Assim, no mecanismo de Cálculo da Tabela Price, a parcela que serve para amortizar a dívida é mais baixa (menor) no início do financiamento e cresce ao longo do contrato. Este financiamento é ideal para pagamento de veículos e crediário em geral que tem prazo curto e a prestação é fixa, mas, pode ser inadequado para financiamentos em longo prazo que contenham um indexador que, na hipótese de acelerar poderá deixar resíduo a ser renegociado no final do contrato.

Na Tabela Price, as prestações podem aumentar durante todo o prazo de financiamento. Nesse sistema, você estará mais exposto a um aumento nos indexadores provocados por um aumento da inflação e não temos bola de cristal para adivinhar o que ocorrerá daqui a vinte anos mesmo com a pretensa estabilidade.

Apesar do risco de aumento nos indexadores, pode também existir nos demais mecanismos de amortização. Ele é mais atenuado no sistema SAC ou SACRE já que o saldo devedor decresce mais rapidamente. Exatamente por isso, as instituições que adotam a Tabela Price nos seus financiamentos imobiliários tendem a aceitar um percentual menor de comprometimento da renda do que o aceito no SAC ou SACRE.

Resumo

No decorrer desta aula foram estudadas as técnicas de amortização, utilizando três tipos de tabelas: a SAC (Sistema de Amortização Constante), a SACRE (Sistema de Amortização Crescente) e a PRICE ou sistema Francês (tabelas de juro composto pelo seu autor Richard Price).

O Sistema de Amortização Crescente (SACRE) era utilizado SOMENTE pela Caixa Econômica Federal. Atualmente outros bancos de capital estrangeiro também aderiram ao sistema. A diferença básica entre este sistema e os outros (PRICE e SAC) é o de apresentar o valor da parcela de amortização superior, proporcionando uma redução mais rápida do saldo devedor. Também neste plano a prestação inicial pode comprometer até 30% da renda, enquanto nos outros o comprometimento máximo é 25% e o valor das prestações é decrescente. Na página da Caixa Econômica Federal você encontra um simulador de financiamento habitacional: http://www.caixa.gov.br/habitacao/index.asp

Anotações

Aula 25 – Sistemas de amortização – formulário

Nesta aula faremos um resumo dos principais sistemas de amortização úteis ao entendimento dos financiamentos de imóveis.

25.1 Sistema de amortização PRICE

As principais características deste sistema são:

- Prestações constantes
- Amortizações crescentes
- Juros decrescentes.

Para calcular as prestações, utilizaremos a seguinte fórmula:

$$PMT = \frac{PV.\ (1+i)^{n}\ .\ I}{(1+i)^{n}-1}$$

Exemplo:

1. Elaborar a planilha Price de um empréstimo de R$120.000,00, a taxa de 5% a.m. em três prestações iguais e consecutivas.

$$PMT = 120000\ \frac{(1+0,05)^{3} \times 0,05}{(1+0,05)^{3} - 1}$$

PMT = 120000 x (0,05788/0,15763)

PMT = 120000 x 0,3672 = R$44.065,00

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				120.000,00
1	44.065,00	6.000,00	38.065,00	81.935,00
2	44.065,00	4.096,75	39.968,25	41.966,75
3	44.065,00	2.098,38	41.996,66	0

2. Considerar um empréstimo de R$100.000,00 tomado por uma empresa, para ser liquidado em três vezes iguais, com taxa de juros de 4,5% a.m. Elaborar a planilha PRICE.

n	PMT	Juros	Amortização	Saldo Devedor
0				100.000,00
1				
2				
3				

25.2 Sistema de amortização constante (SAC)

Este sistema é muito utilizado em créditos imobiliários. As principais características deste sistema são:

► Amortizações constantes

► Juros decrescentes

► Parcelas decrescentes.

Como este sistema tem por característica as amortizações constantes, basta, para calcular as amortizações, dividir o valor da dívida pelo número de prestações.

$$\text{Amortização} = \frac{PV}{n}$$

Exemplo:

1. Considerar um financiamento de R$50.000,00 a taxa de 4,8% a.m., para ser quitado em cinco prestações no sistema SAC.

Amortização = 50.000/5 = R$10.000,00

N	Saldo Devedor	Amortização	Juros	PMT
0	50.000,00			
1	40.000,00	10.000,00	2.400,00	12.400,00
2	30.000,00	10.000,00	1.920,00	11.920,00
3	20.000,00	10.000,00	1.440,00	11.440,00
4	10.000,00	10.000,00	960,00	10.960,00
5	0	10.000,00	480,00	10.480,00

Em resumo:

Tabela 25.1: Tabela Price

Tabela Price - Sistema Francês de Amortização	SACRE - Sistema de Amortização Crescente	SAC - Sistema de Amortização Constante
• prestações fixas a cada 12 meses • limite de até 25% da renda familiar • financiamento em parcelas iguais • sem residual reajuste feito durante o financiamento • composto por amortização de juros • juros compostos • juros maiores que por SACRE e SAC • valor de financiamento maior	• limite de até 30% da renda familiar • prestações fixas a cada 12 meses • recomendável se puder desembolsar mais no começo • amortização é mais rápida diminuindo o valor dos juros	• prestações decrescentes com reajuste a cada 12 meses • sistema decrescente, já que desde o começo há a amortização. • os juros são calculados sobre o residual, como é amortizado, os juros caem assim como a mensalidade final • o valor das mensalidades decresce
Para um profissional em ascensão, com grandes chances de promoções ou aumento de salário, em função de seu planejamento profissional, a Price é uma boa saída.	Para profissional estabilizado, sem muitas possibilidades de promoções ou aumentos salariais nos próximos anos e puder pagar um valor mais elevado na primeira prestação, o indicado seria a SAC ou a Sacre, uma vez que as mensalidades vão diminuindo ao longo dos anos. Comprometimento da renda ideal, segundo os especialistas, é de 30%.	
Vários contratos firmados até 28/07/93 tem valor residual a ser pago pelo Fundo de Compensação de Variação Salarial (FCVS)		
De qualquer forma, a melhor forma de se livrar de financiamentos, seus reajustes, indexadores e correção monetária, ainda é comprando **à vista**.		
Para tirar suas dúvidas pergunte ao seu gerente financeiro ou a alguém que tenha imóvel financiado		

Fonte: Elaborado pelo autor

A ideia é aumentar o tamanho da tabela e imprimir em formato paisagem para ficar maior e visível. Penso que deve ser refeita, pois, a imagem fica ruim no livro impresso, tendo em vista que as imagens no momento da impressão podem ficar fora de foco, dificultando a leitura.

Agora vamos analisar o seguinte depoimento:

"Entendo a Tabela "Price" como uma das mais práticas e harmônicas aplicações dos conhecimentos da engenharia econômica para o bem estar do cidadão. Lembro-me bem quando comecei a estudar matemática no ginásio (5ª série do primeiro grau de hoje). Não vislumbrava as aplicações para tudo aquilo. O mesmo aconteceu no científico. Por incrível que pareça na faculdade. Deparei–me com a Tabela "Price" quando cursava o primeiro ano da faculdade e já trabalhava. O caso que apareceu em minhas mãos foi o início de uma "paixão", que dura até hoje. Conviver com as nuanças do "Valor do Dinheiro no Tempo" simplesmente é um alimento para novos desafios. A Tabela "Price" é uma das filhas da Matemática Financeira ou Engenharia Econômica. Ela está no nosso cotidiano e às vezes passa despercebida. O fato de pensarmos em comprar alguma coisa a prazo ou à vista já envolve a Tabela "Price". Sei que os vendedores das lojas de eletrodomésticos nunca, na sua grande maioria, ouviram falar dessa genialidade, mas a usam constantemente quando fazem contas de valores de prestações usando "fatores" que lhes foram fornecidos para lhes facilitar a vida."

Fonte: http://www.portaldefinancas.com/indextp.htm, acessado em 27/10/09.

Um financiamento de 120 meses para um imóvel com valor de R$50.000,00; taxa de juros de 12% a.a. e TR (taxa referencial de juros obrigatória por lei) mensal de 0,2149%.

Sistema de amortização adotado: SACRE (Sistema de Amortização Crescente)

Fórmula: Prestação = saldo devedor x {(1/n) + (taxa juros mês/100)}

Sendo assim:

Prestação = 50.000 x { (1/120) + (0,01) } = 916,67

Assim temos o valor da primeira parcela. Consideramos **n** como sendo o período total do financiamento menos o período já pago. Neste exemplo, para a primeira parcela n é igual a 120. Para a 13ª parcela n será igual a 108 (120 – 12).

O saldo devedor do financiamento é corrigido mensalmente pela TR (0,21490%). Desta forma, primeiro corrige-se o saldo devedor, depois diminui a parcela da amortização, e assim, terá o saldo devedor corrigido.

Cálculo do valor mensal dos juros a pagar:

Valor juros mensal = taxa juros mês x saldo devedor mês x TR

Cálculo do valor da amortização do seu financiamento

Valor amortização = prestação - valor juros mês

Sendo assim temos a seguinte tabela:

N	Amortização	Juros	Prestação	Saldo Devedor
0	-	-	-	50000,00
1	809,22	107,45	916,67	49190,78
2	810,96	105,71	916,67	48379,82

Passados os 12 primeiros meses, o saldo devedor será corrigido, gerando uma nova prestação que durará por mais 12 meses.

Resumo

Nesta aula, revisamos os principais sistemas de amortização úteis ao entendimento dos financiamentos de imóveis para o entendimento de qual seria o melhor sistema para a compra de um imóvel em longo prazo.

Atividades de aprendizagem

1. Faça a simulação para o valor de um financiamento de R$60.000,00 com as mesmas taxas e período de 10 meses para preencher a tabela, formando uma nova com o sistema SACRE.

2. Elaborar a planilha Price, para um empréstimo de R$85.000,00 a uma taxa de 6% a.m. em 10 vezes.

3. Elaborar a planilha SAC, para um empréstimo de R$98.000,00 a uma taxa de 5,5% a.m. em oito vezes.

Aula 26 – Teclas HP-12C

Aula de Matemática Financeira com a HP-12C.

Observações das teclas da HP-12C:

[n] número de períodos da série (aproximado para o inteiro superior)

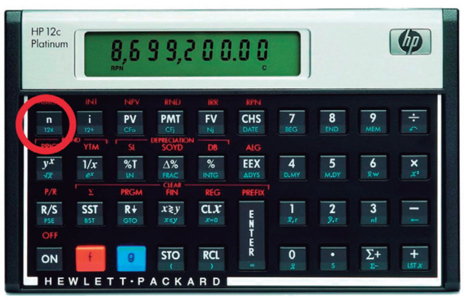


Figura 26.1: Tecla n
Fonte: http://bimg2.mlstatic.com

[i] taxa da série (para séries uniformes e não uniformes)

Figura 26.2: Tecla i
Fonte: http://bimg2.mlstatic.com

[PV] Valor presente da série (*Present Value*)

Figura 26.3: Tecla PV
Fonte: http://bimg2.mlstatic.com

[PMT] Pagamento (*Periodic Payment Amount*) - É o valor de uma parcela a cada período.

Figura 26.4: Tecla PMT
Fonte: http://bimg2.mlstatic.com

[FV] Valor futuro da série (*Future Value*)

Figura 26.5: Tecla FV
Fonte: http://bimg2.mlstatic.com

Anotações

Aula 27 – Exercício prático I

Nesta aula veremos exercícios práticos resolvidos na calculadora HP-12C.

Exercício 1:

Qual o montante obtido de uma aplicação de **$1.000,00** em **5** meses a **2%** ao mês?

VF = $1000 \times (1 + 0{,}02)^5$

VF = 1000 x 1,10408

VF = $1000 \times (1{,}02)^5$

VF = $1.104,08

$VF = VP \times (1 + i)^n$

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[5] [n]	**visor 5,0000**
[2] [i]	**visor 2,0000**
[1000] [CHS] [PV]	**visor -1.000,0000**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 1.104,0808 (Valor Futuro)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 1.104,08 (Valor Futuro)

Exercício 2:

Qual o montante obtido de uma aplicação de **$550,00** feita por **4** meses a uma taxa de **20%** ao ano?

VF = $550 \times (1 + 0{,}20)^{4/12}$

VF = \$584,46

$VF = VP \times (1 + i)^{n}$

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[4] [ENTER] [12] [/] [n]	**visor 0,3333**
[20] [i]	**visor 20,0000**
[550] [CHS] [PV]	**visor -550,0000**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 584,4622 (Valor Futuro)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 584,46 (Valor Futuro)

Exercício 3:

Uma operação no regime de capitalização composta rendeu um montante igual a **\$8.400,00** após **6** meses. Sabendo que a taxa da operação foi igual a **2%** ao mês, calcule o valor presente.

8.400 = **VP** $\times (1 + 0{,}02)^{6}$ = **\$7.458,96**

$VF = VP \times (1 + i)^{n}$

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[6] [n]	**visor 6,0000**
[2] [i]	**visor 2,0000**
[8400] [CHS] [FV]	**visor -8.400,0000**
[PV]	**visor running (piscando)**
	visor 7.458,9596 (Valor Presente)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 7.458,96 (Valor Presente)

Exercício 4:

Um capital inicial de **$430,00** rendeu **$80,00** de juros após permanecer aplicado por **4** meses. Qual foi a taxa de juros mensal da aplicação?

$510 = 430 \times (1 + i)^4$

$VF = VP \times (1 + i)^n$

i = **0,0436 a.m. ou 4,36% a.m.**

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[4] [n]	**visor 4,0000**
[510] [FV]	**visor 510,0000**
[430] [CHS] [PV]	**visor -430,0000**
[i]	**visor running (piscando)**
	visor 4,3579 (valor da taxa ao mês)
	ou 0,0436 a.m. = 4,3579 % ao mês

Anotações

Aula 28 – Exercício prático II

Nesta aula veremos exercícios práticos resolvidos na calculadora HP-12C.

Exercício 1:

Um montante de **$630,00** foi obtido após aplicação de **$570,00** a uma taxa de juros compostos igual a **3%** a.m. Qual foi a duração da operação?

$630 = 570 \times (1 + 0{,}03)^{n}$

n = **3,3859 ≅ 4 meses**

$VF = VP \times (1 + i)^{n}$

Resolução pela HP 12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[630] [FV]	**visor 630,0000**
[3] [i]	**visor 3,0000**
[570] [CHS] [PV]	**visor -570,0000**
[n]	**visor running (piscando)**
	visor 4,0000 (período de tempo = meses) a calculadora HP12C aproxima o resultado para o inteiro superior.

Exercício 2:

Uma máquina de calcular é anunciada por **$140,00** a vista ou para pagamento com prazo igual a **2** meses, mediante uma taxa igual a **5%** ao mês. Qual o valor futuro?

VF = $140 \times (1 + 0{,}05)^{2}$

VF = **$154,35**

$VF = VP \times (1 + i)^{n}$

Resolução pela HP 12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[2] [n]	**visor 2,0000**
[5] [i]	**visor 5,0000**
[140] [CHS] [PV]	**visor -140,0000**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 154,3500 (Valor Futuro)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 154,35 (Valor Futuro)

Exercício 3:

Suponha que Mariano aplique **$8.000,00** à taxa de juros compostos de **5%** a.m. Quanto ele terá daqui a **14** meses?

VF = $8000 \times (1 + 0,05)^{14}$

$VF = VP \times (1 + i)^{n}$

VF = **$15.839,45**

Resolução pela HP 12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[14] [n]	**visor 14,0000**
[5] [i]	**visor 5,0000**
[8000] [CHS] [PV]	**visor -8.000,00**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 15.839,4528 (Valor Futuro)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 15.839,45 (Valor Futuro)

Aula 29 – Exercício prático III

Nesta aula veremos exercícios práticos resolvidos na calculadora HP 12C.

Exercício 1:

Se um cliente aplicou **$25.000,00** em um CDB de **42** dias, no regime de juros compostos, a uma taxa de juro de **50%** a.a, quanto o banco deverá creditar em sua conta, desconsiderando o imposto de renda? Considere o ano comercial.

VF = $26.211,02

Resolução pela HP 12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[42] [ENTER]	**visor 42,0000**
[360] [/] [n]	**visor 0,1167**
[50] [i]	**visor 50,0000**
[25000] [CHS] [PV]	**visor -25000,0000**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 26.211,0241 (Valor Futuro)
[f] 2	**Fixar com duas casas decimais.**
	visor 26.211,02 (Valor Futuro)

Exercício 2:

Calcule os juros auferidos após uma aplicação financeira de **$62.000,00**, com prazo de **42** dias, a uma taxa efetiva de **18%** a.a., assumindo regime de juros compostos e ano com **360** dias.

J = $1.208,8550

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[42] [ENTER]	**visor 42,0000**
[360] [/] [n]	**visor 0,1167**
[18] [i]	**visor 18,0000**
[62000] [CHS] [PV]	**visor -62000,0000**
[FV]	**visor running (piscando)**
	visor 63.208,8551 (VF) para achar o juros é só subtrair $62.000 do VF
[62000] [-]	**visor 1.208,8551**
[f] 2	**visor 1.208,86 (Valor dos juros)**

Exercício 3:

Um título federal com prazo de 3 meses tem valor de resgate igual a $42.000,00 na data de seu vencimento e deve ser substituído por um outro com prazo de cinco meses a contar de hoje. Ou seja, existem dois meses entre os vencimentos dos títulos. Determine o valor nominal desse novo título, utilizando uma taxa de desconto racional igual a 25% ao ano, no regime de juros compostos.

[f] [REG] 2 [ENTER] 12 [/] [n] 25 [i] 42000 [PV] [FV]

$$VF = 4200\ (1 + 0{,}25)^{2/12}$$

VF = $43.591,41

Exercício 4:

Antônio Luiz tomou um empréstimo no valor de $50.000,00, acertando um prazo de 230 dias e uma taxa efetiva de juros composto igual a 38% ao ano. Os juros serão pagos no final junto com a devolução do capital. Calcule os juros da transação, considerando o ano comercial.

J = $ 11.423,87

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	Fixar quatro casas decimais.
[f] [REG]	Apagar registros anteriores.
[STO] [EEX]	Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)
[230] [ENTER]	visor 230,0000
[360] [/] [n]	visor 0,6389
[38] [i]	visor 38,0000
[50000] [CHS] [PV]	visor -50000,0000
[FV]	visor running (piscando)
	visor 61423,8732 (VF) para achar o juros é só subtrair $50.000 do VF
[50000] [-]	visor 11.423,8732
[f] 2	visor 11.423,87

Anotações

Aula 30 – Exercício prático IV

Nesta aula veremos exercícios práticos resolvidos na calculadora HP 12C.

Exercício 1:

Samuel quer fazer uma aplicação hoje para possuir $ 5.000,00 daqui a um ano. Sabendo que a taxa de juros compostos dessa operação é de 1,8% ao mês, quanto ele deve aplicar?

VP = $ 4.036,42

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracioná-veis)**
[12] [n]	**visor 12,0000**
[1,8] [i]	**visor 1,8000**
[50000] [CHS] [FV]	**visor -50000,0000**
[PV]	**visor running (piscando)**
	visor 4.036,4230 (VP)
[f] 2	**visor 4.036,42**

Exercício 2:

Qual o valor presente de um montante igual a $48.700,00, aplicado à taxa de juros compostos de 35% ao ano por 6 meses?

VP =$ 41.914,2864

Resolução pela HP-12C:

[f] 4	**Fixar quatro casas decimais.**
[f] [REG]	**Apagar registros anteriores.**
[STO] [EEX]	**Aparecerá um *c* no visor. (JC fracionáveis)**
[0,5] [n]	**visor 0,5000**
[35] [i]	**visor 35,0000**
[48700] [CHS] [FV]	**visor -48700,0000**
[PV]	**visor running (piscando)**
	visor 41.914,2864 (VP)
[f] 2	**visor 41.914,29**

Exercício 3:

Um consumidor pagou, mediante cartão de crédito, a quantia de $625,00, referente à compra de um aparelho de som, realizada há 52 dias. Sabendo-se que o custo de oportunidade dos recursos do cliente foi igual a 3,3% a.m., por quanto poderia ter saído o eletrodoméstico, se comprado à vista?

VP = $ 590,7986

Resolução pela HP-12C:

[f] [REG] 52 [ENTER] 30 [/] [n] 3,3 [i] 625 [CHS] [PV]	
Running	**590,7986**

Anotações

Referências

MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo, e Zani, Sheila C. **Progressões e Matemática Financeira**. SBM, Rio de Janeiro, 4 a. edição, 2001.

BAUER, Udibert Reinoldo. **Matemática financeira fundamental**. Ed. Atlas. SP 2003.

BRUNI, Adriano Leal & FAMÁ, Rubens. **Matemática Financeira: com HP 12c e Excel**. São Paulo: Atlas, 2002

CRESPO, Antônio Arnot. (2001) **Matemática Comercial e Financeira Fácil**. 13a. ed. São Paulo: Saraiva.

FRANCISCO, Walter de. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1991

GUERRA, Fernando. (2006) **Matemática Financeira com a HP-12C**. 3. ed. Florianópolis: Editora da UFSC.

KUNHEM, Osmar Leonardo. **Matemática Financeira Empresarial**. Ed. Atlas. São Paulo, 2006.

LAPPONI, Juan Carlos. **Matemática Financeira - Uma Abordagem Moderna** - Lapponi Editora Ltda, 2ª Edição, 1994.

LAPPONI, Juan Carlos. **Matemática financeira: usando Excel 5 e 7**. São Paulo: Lapponi Treinamento e Editora Ltda., 1996

MATHIAS, Washington Franco & Gomes, José Maria - **Matemática Financeira** Editora Atlas, 1996.

MATHIAS, Washington Franco & GOMES, José Maria. **Matemática Financeira**. São Paulo: Atlas, 1992

MERCHEDE, Alberto – **Matemática Financeira, para usuários de HP12C e Excel**. Ed. Atlas. SP 2001.

NETO, Alexandre Assaf Martins, Eliseu **Administração Financeira** - Editora Atlas, 2000.

SAMANEZ, Carlos Patrício. (2006) **Matemática Financeira: Aplicações à Análise de Investimentos**. 4a. ed. São Paulo: Pearson.

SECURATO, José Roberto. (2005) **Cálculo Financeiro das Tesourarias**. 3. ed. São Paulo: Saint Paul.

VERAS, Lilia Ladeira. **Matemática financeira: uso de calculadoras financeiras, aplicações ao mercado financeiro, introdução à engenharia econômica**, 300 exercícios resolvidos e propostos com respostas. São Paulo: Atlas, 2001.

VIEIRA SOBRINHO, J. D. **Matemática financeira**. 7 ed., São Paulo: Atlas,2000.

Atividades autoinstrutivas

1. **Quanto é 13% de R$850,00?**

a) R$130,00

b) R$120,50

c) R$110,50

d) R$108,00

e) R$100,00

2. **30% de R$640,00 é igual a:**

a) R$182,00

b) R$192,00

c) R$198,00

d) R$207,00

e) R$190,50

3. **Um aluguel de R$550,00 sofreu um aumento de 18%. Ele passou a valer:**

a) R$649,00

b) R$612,00

c) R$504,00

d) R$99,00

e) R$200,10

4. **(CESCEM-SP) 3% de 0,009 vale:**

a) 0,00027

b) 0,0027

c) 0,00009

d) 0,09

e) 0,0081

5. Assinale a alternativa CORRETA:

a) 6% = 0,6

b) 13% = 1,3

c) 140% = 1,4

d) 20,5% = 0,0205

e) 100% = 1,001

6. 0,5% de R$550,00 é igual a:

a) R$2,75

b) R$25,00

c) R$55,75

d) R$5,50

e) R$5,55

7. Assinale a alternativa CORRETA:

a) 60% = 0,06

b) 13% = 1,03

c) 140%= 1,04

d) 20,5% = 0,250

e) 100% = 1

8. Em 20/03/2005 o saldo bancário de Roberto era de R$1.500,00 positivo. Entre os dias 20 a 28 de março de 2005, o extrato bancário de Roberto mostrou a seguinte movimentação:

- 21/03/2005, retirada de R$ 400,00

- 22/03/2005, retirada de R$350,00
- 23/03/2005, depósito de R$100,00
- 24/03/2005, retirada de R$990,00
- 26/03/2005, depósito de R$560,00
- 28/03/2005, retirada de R$230,00

Qual será o saldo bancário de Roberto, no final do dia 28/03/2005?

a) R$180,00

b) R$190,00

c) R$198,00

d) R$270,00

e) R$280,00

9. Ao verificar seu controle de despesas, Gustavo percebeu que alguns débitos e créditos ainda não haviam sido anotados para o respectivo saldo (?).

Data Mês abril	Descrição	Crédito (R$)	Débito (R$)	Saldo (R$)
02	Saldo anterior	R$480,30		R$480,30
03	Pagto. do cartão de crédito		- R$430,15	R$50,15
05	Tarifa Banco (c/c especial)		- R$20,15	R$30,00
06	Pagto da parcela da internet		- R$50,30	- R$20,30
09	Conta de telefone		- R$161,95	- R$182,25
14	Depósito		?	R$567,60
19	Conta de água		?	- R$277,40
23	Prestação do carro		?	- R$314,20
29	Conta de luz		?	- R$403,40
30	Depósito salário	R$1.596,60		

Levando em consideração que não houve mais entrada nem saída de valores da C/C de Gustavo, o saldo final da conta corrente de Gustavo após o dia 30 de abril, é igual a:

a) R$1.266,40

b) R$1.193,20

c) R$1.488,55

d) R$1.570,59

e) R$1.616,56

10. Calcular os juros simples de R$1.200,00 a 13 % a.t. por quatro meses e 15 dias.

a) R$234,00

b) R$199,20

c) R$148,50

d) R$150,00

e) R$166,00

11. Calcular os juros simples produzidos por R$40.000,00, aplicados à taxa de 36% a.a., durante 125 dias.

a) R$5000,00

b) R$9999,20

c) R$4488,55

d) R$5857,59

e) R$1616,56

12. Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R$3.500,00 de juros em 75 dias?

a) R$116.666,67

b) R$125.445,20

c) R$441.488,55

d) R$581.657,59

e) R$161.216,56

13. Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

a) 8 meses

b) 10 meses

c) 15 meses

d) 20 meses

e) 25 meses

14. Aplicou-se a juros compostos uma capital de R$1.400.000.00, a 4% ao mês, durante 3 meses. O montante produzido neste período é igual a:

Obs.: devemos lembrar que 4% = 4/100 = 0,04

a) R$1.880.809,60

b) R$1.990.555,00

c) R$1.988.520,00

d) R$2.700.790,00

e) R$1.574.809,60

15. Qual o capital aproximado que aplicado a juros compostos a 8% ao mês, produz em dois meses um montante de R$18.915,00 de juros.

a) R$12.880,60

b) R$13.990,20

c) R$14.988,55

d) R$15.700,59

e) R$16.216,56

16. **A que taxa ao mês esteve aplicado, em uma caderneta de poupança, um capital de R$1.440,00 para, em dois meses, produzir um montante de R$1.512,90?**

a) 2,5% ao mês

b) 2,4% ao mês

c) 2,3% ao mês

d) 2,2% ao mês

e) 2,1% ao mês

17. **Em quanto tempo um capital triplica de valor aplicado a uma taxa de juros simples de 20% a.a.?**

a) 5 anos

b) 10 anos

c) 15 anos

d) 20 anos

e) 25 anos

18. **Quanto renderá de juros simples de uma quantia de R$80.000,00 aplicada durante 6 meses a uma taxa de 3% ao mês?**

a) R$14.880,20

b) R$14.990,20

c) R$14.988,05

d) R$14.700,50

e) R$14.400,00

19. **(FGV-SP) Um capital C foi aplicado a juros simples durante 10 meses, gerando um montante de R$10.000,00; esse montante, por sua vez, foi também aplicado a juros simples, durante 15 meses, à mesma taxa da aplicação anterior, gerando um montante de R$13.750,00. Qual o valor de C?**

a) R$8.880,20

b) R$8.990,20

c) R$8.988,05

d) R$8.700,50

e) R$8.000,00

20. **Uma aplicação de R$40 000,00 rendeu, em 3 meses, a quantia de R$4 800,00 de juros simples. Qual foi a taxa mensal de juro?**

a) 2%

b) 4%

c) 3%

d) 2,2%

e) 1%

21. **Certa quantia, aplicada durante 5 meses a uma taxa de juros simples mensal de 3%, rendeu R$8 250,00. Qual foi a quantia aplicada?**

a) R$64 900,00

b) R$61 200,00

c) R$50 000,00

d) R$99 000,00

e) R$55 000,00

22. **(FGV-SP) Antônio investiu a quantia recebida de herança em três aplicações distintas: 35% do total recebido em um fundo de renda fixa; 40% do valor herdado em um fundo cambial e o restante da herança em ações. No final de um ano as aplicações renderam de juro, um total de R$28 500,00. Determine a quantia herdada por Antônio, sabendo que os rendimentos anuais foram de 30%, 20% e 40%, respectivamente, no fundo de renda fixa, no fundo cambial e nas ações.**

a) R$105 900,00

b) R$110 200,00

c) R$150 000,00

d) R$199 000,00

e) R$100 000,00

23. (FGV-SP) Um investidor aplicou a juros simples na mesma data, por 20 dias, em fundos diferentes que operam no sistema de juro simples, os capitais de R$110 000,00 e R$80 000,00. No final do período o maior valor, aplicado à taxa de 9% ao mês, rendeu, de juro, R$ 3 400,00 a mais que a aplicação do menor valor. Determine a taxa mensal de juros de aplicação do menor valor.

a) 2% a.m.

b) 4% a.m.

c) 3% a.m.

d) 22% a.m.

e) 6% a.m.

24. (FGV) Um vidro de perfume é vendido à vista por R$48,00 ou a prazo, em dois pagamentos de R$25,00 cada um, o primeiro no ato da compra e o outro um mês depois. A taxa mensal de juros das parcelas é aproximadamente igual a:

a) 6,7%

b) 7,7%

c) 8,7%

d) 9,7%

e) 10,7%

25. Mário tomou emprestado R$240 000,00 durante 3 meses, à taxa de 60% ao ano. Que quantia devolveu após os 3 meses, no regime simples de formação?

a) R$115 000,00

b) R$111000,00

c) R$155 000,00

d) R$196 000,00

e) R$276 000,00

26. (FGV-SP) Pedro aplicou R$20 000,00 por um ano em dois fundos A e B. O fundo A rendeu 10% e B rendeu 25%. Sabendo que o ganho proporcionado pelo fundo B foi superior ao de A em R$100, 00, podemos afirmar que a diferença (em valor absoluto) dos valores aplicados em cada fundo foi de:

a) R$8 000,00

b) R$7 000,00

c) R$5 000,00

d) R$6 000,00

e) R$9 000,00

27. Calcule o juro produzido por R$90 000,00, durante 90 dias, a uma taxa de juros simples de 3,5% ao mês.

a) R$8 100,00

b) R$7 200,00

c) R$5 300,00

d) R$6 500,00

e) R$9 450,00

28. Calcular o juro que um capital de R$12 000,00 rende, durante 23 dias, à taxa de juros simples de 30% ao mês.

a) R$1 100,00

b) R$2 200,00

c) R$3 300,00

d) R$2 760,00

e) R$2 790,00

29. Qual é o montante produzido pelo capital de R$18.500,00 durante 1 ano e meio, a uma taxa de juros simples de 7,5% ao mês?

a) R$15.975,00

b) R$11.200,00

c) R$15.900,00

d) R$29.975,00

e) R$24.975,00

30. Um comerciante tomou emprestado de um banco R$ 400 000,00. O banco emprestou a uma taxa de juros simples de 38% ao ano. O comerciante teve que pagar R$ 304 000,00 de juros. Por quantos anos o dinheiro esteve emprestado?

a) 6 anos

b) 7 anos

c) 8 anos

d) 9 anos

e) 2 anos

31. (TTN) Carlos aplicou 1/4 de seu capital a juros simples comerciais de 18% a.a., pelo prazo de 1 ano, e o restante do dinheiro a uma taxa de 24% a.a., pelo mesmo prazo e regime de capitalização. Sabendo-se que uma das aplicações rendeu R$594,00 de juros, mais do que a outra, o capital inicial era de R$

a) 4.200,00

b) 4.800,00

c) 4.900,00

d) 4.600,00

e) 4.400,00

32. (TTN) Três capitais são colocados a juros simples: o primeiro a 25% a.a., durante 4 anos; o segundo a 24% a.a., durante 3 anos e 6 meses e o terceiro a 20% a.a., durante 2 anos e quatro meses. Juntos renderam um juro de R$27.591,80. Sabendo que o segundo capital é o dobro do primeiro e que o terceiro é o triplo do segundo, o valor do terceiro capital é de:

a) R$30.210,00

b) R$10.070,00

c) R$15.105,00

d) R$20.140,00

e) R$5.035,00

33. (TTN) Calcular a taxa que foi aplicada a um capital de R$4.000,00, durante 3 anos, sabendo-se que se um capital de R$10.000,00 fosse aplicado durante o mesmo tempo, a juros simples de 5% a.a., renderia mais R$600,00 que o primeiro. A taxa é de:

a) 8,0%

b) 7,5%

c) 7,1%

d) 6,9%

e) 6,2%

34. (MACK-SP) Três meses atrás, depositei na poupança R$10 000,00. No primeiro mês ela rendeu 1,6%, no segundo mês 1,0% e no terceiro mês 1,2%. Quanto tenho agora?

a) R$10.200,70

b) R$14.800,50

c) R$12.900,05

d) R$11.600,98

e) R$10 384,73

35. Para render juros de R$4 375,00 à taxa de 2,5% ao mês, devo aplicar meu capital de R$50 000,00 durante quanto tempo?

a) três meses

b) sete meses

c) oito meses

d) dois meses

e) 3,5 meses

36. (FGV) Um aparelho de TV é vendido por R$1.000,00 em dois pagamentos iguais, sem acréscimo, sendo o 1° como entrada e o 2° um mês após a compra. Se o pagamento for feito à vista, há um desconto de 4% sobre o preço de R$1.000,00. A taxa mensal de juros simples do financiamento é aproximadamente igual a:

a) 8,7%

b) 7,7%

c) 6,7%

d) 5,7%

e) 4,7%

37. A quantia de R$27 000,00, emprestada a taxa de juros simples de 1,2% ao mês, quanto rende em 6 meses?

a) R$1 200,70

b) R$1 800,50

c) R$1 950,05

d) R$1 650,98

e) R$1 944,00

38. **Um capital de $5 000,00, aplicado a juros a juros simples, à taxa mensal de 3%, por um prazo de 1 ano e 3 meses, produzirá um montante no valor de:**

a) $7 225,00

b) $7 250,00

c) $7 320,00

d) $7 500,00

e) $7 550,00

39. **Uma pessoa tem $20 000,00 para aplicar a juros simples. Se aplicar $5 000,00 à taxa mensal de 2,5% e $7 000,00 à taxa mensal de 1,8%, então, para obter um juro anual de $4 932,00, deve aplicar o restante à taxa mensal de:**

a) 2%

b) 2,1%

c) 2,4%

d) 2,5%

e) 2,8%

40. **(FGV-SP)No regime de juros compostos, a taxa de juro anual que produz um montante 44% superior ao capital inicial, no prazo de aplicação de dois anos é:**

a) 20%

b) 21,5%

c) 21%

d) 20,5%

e) 22%

41. **Um capital de R$1.000.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 1 ano, à taxa de 60% a.a. com capitalização mensal. Qual o montante dessa aplicação?**

a) R$1.795.900,00

b) R$1.600.567,00

c) R$1.700.000,00

d) R$1.450.340,00

e) R$1.450.800,00

42. **(FGV) O Sr. Vítor costuma aplicar suas economias num fundo que rende juros compostos. Se ele aplicar hoje R$10 000,00 e R$20.000,00 daqui a 1 ano, qual seu saldo daqui a 2 anos, se a taxa for de 15% a.a.?**

a) R$12 200,70

b) R$15 800,50

c) R$12 950,05

d) R$17 650,98

e) R$36 225,00

43. **Qual o montante de uma aplicação de R$1.000.000,00, a juros compostos, durante 6 meses à taxa de 36% a.a., capitalizados mensalmente?**

a) R$1.167.066,00

b) R$1.450.597,00

c) R$1.194.100,00

d) R$1.190.340,00

e) R$1.200.350,00

44. Determine o prazo de uma aplicação de R$550.000,00, a juros compostos, capitalizados mensalmente, se desejo obter um montante de R$1 272 183,00, a taxa de juro de 15% a.m.

a) 2 meses

b) 3 meses

c) 4 meses

d) 5 meses

e) 6 meses

45. Qual a taxa efetiva para que o capital de R$1.200.000,00, aplicado durante 1 ano, com capitalização mensal, atinja um montante de R$3.021.720,00?

a) 4% a.m.

b) 8% a.m.

c) 5% a.m.

d) 9% a.m.

e) 10% a.m.

46. Qual a taxa efetiva para que o capital de R$1.200.000,00, aplicado durante 1 ano, com capitalização mensal, atinja um montante de R$2.155.027,20.

a) 4% a.m.

b) 8% a.m.

c) 5% a.m.

d) 9% a.m.

e) 10% a.m.

47. **O montante gerado por um capital de R$160.400,00, no fim de 5 anos, com juros de 40% a.a. capitalizados trimestralmente é de:**

$(1+10\%)^{20}=6,7275$

a) R$1.079.090,84

b) R$2.079.090,84

c) R$3.079.090,84

d) R$4.079.090,84

e) R$5.079.090,84

48. **(A.F. CAIXA) Quanto se deve investir hoje, à taxa nominal de juros de 20% ao ano, capitalizados trimestralmente, para se obter R$100.000,00 daqui a 3 anos?**

a) R$14 200,70

b) R$60 800,50

c) R$22 950,05

d) R$55.683,74

e) R$64 461,00

49. **Qual o capital que produz o montante de R$750.000,00 vencível em 8 meses, a uma taxa de juros compostos de 5% ao mês é:**

a) R$532.222,22

b) R$407.449,23

c) R$507.614,20

d) R$568.689,59

e) R$533.639,33

50. Qual o capital que aplicado a 10% a.m. durante 5 meses, produz um montante composto de R$1.610.510,00

a) R$1.000.000,00

b) R$1.500.000,00

c) R$1.800.000,00

d) R$1.300.000,00

e) R$1.100.000,00

Anotações

Currículo do professor-autor

Roberto José Medeiros Junior

Licenciado e Bacharel em Matemática pela Universidade Tuiuti do Paraná (1999). Especialista em Educação Matemática com ênfase em Tecnologias pela Universidade Tuiuti do Paraná (2001). Especialista em Educação a Distância (Tutoria a Distância) – EaD/FACINTER (2007). Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Federal do Paraná (2007). Professor de Matemática do ensino fundamental ao médio da rede pública e privada. Professor de ensino superior nos cursos de licenciatura em Matemática, Física e Pedagogia, na modalidade presencial e a distância em instituições públicas e privadas. Professor de Matemática do Instituto Federal do Paraná na modalidade presencial e a distância. É um dos autores do Livro Didático Público de Matemática para o Ensino Médio do Estado do Paraná. (e, é também,) Autor de livros para a formação continuada do Centro Interdisciplinar de Formação Continuada de Professores (CINFOP) da Universidade Federal do Paraná. Prestador de serviços como assessor pedagógico em Educação Matemática para as escolas públicas (municipal e estadual) e privadas.

Anotações